研究内容紹介

DFT (離散フーリエ変換)

1. DFT の定義

フーリエ変換の定義式は良く知られている通り、

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1}$$

によって定義される。しかし、フーリエ変換したい関数がいつも積分可能な関数であるとは限らないし、数値データで与えられる場合もあるだろう。そのような場合、離散的に取り扱った方が利便性が効く。上式の離散的な場合、離散時間信号系列のフーリエ変換は

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i2\pi kn/N} \tag{2}$$

で表される。ここで N は全要素数を指し、n は各要素番号を意味している。$f(n)$ は各要素番号 n に対応した値を持っている。

2. 使い方

実際に DFT を使用してみよう。通常コンピュータ上では複素数はそのまま計算できないので、もう少し使い易くするため (2) 式をオイラーの式を用いて、実数部と虚数部に分解する。

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi kn/N) - i \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi kn/N) \tag{3}$$

$$= F_{\mathrm{real}} + iF_{\mathrm{imag}} \tag{4}$$

ここで F_{real} と F_{imag} は

$$F_{\mathrm{real}} = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi kn/N) \tag{5}$$

$$F_{\mathrm{imag}} = \sum_{n=0}^{N-1} -\sin(2\pi kn/N) \tag{6}$$

と定義する。上式を使って良く知られた式 $\sin(2\pi t)$ を離散フーリエ変換してみよう。

(1) 離散化

ここでは簡単のために要素数 N を 8 とする。$\sin(2\pi t)$ を要素数 N を使って離散化し、各値を使って離散フーリエ変換を施そう。

$$X[n] = \sin(2\pi n/N) \tag{7}$$

この場合では

$$X[n] = \sin(2\pi n/8) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \tag{8}$$

となる。ここで $X[n]$ はプログラム上における配列変数のようなものをイメージしてもらいたい。$X[n]$ をグラフ化すると 実際の連続関数 $\sin(2\pi x)$ に比べてカ

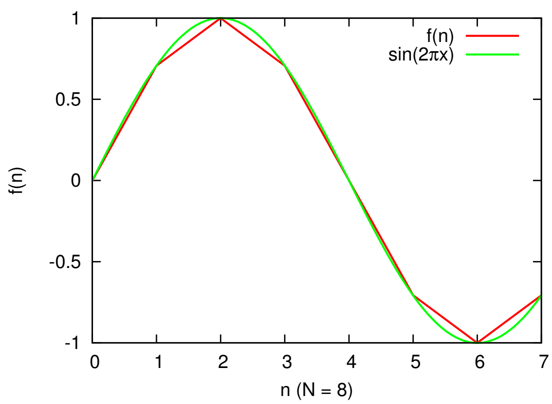

Fig. 1　離散化した $\sin(2\pi n/N)$

クカクしているのが分かるだろう。

(2) 離散フーリエ変換

離散フーリエ変換を施すには (5), (6) 式を計算すればよい。(5), (6) 式をプログラム的に書き直すと、

```
for(k=0;k<N;k++)
   for(n=0;n<N;n++)
      {
        Fr[k]  += X[n]*cos(2*3.14*k*n);
        Fi[k]  -= X[n]*sin(2*3.14*k*n);
      }
```

ここで Fr[k] が F_{real} の計算に、Fi[k] が F_{imag} の計算にそれぞれ該当する。また、プログラム上で Fr[k]、Fi[k] は配列数 k 個の変数である。計算した Fr[k]、Fi[k] を出力すれば、以下の表のような値が得られる。1 列目が実数部の値 (Fr[k])、2 列目が虚数部の値 (Fi[k])、3 列目が絶対値 $(\mathrm{Fr}[k]^2 + \mathrm{Fi}[k]^2)^{1/2}$ を取ったものとなっている。

# 実数部	虚数部	絶対値
0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	-4.000000	4.000000
0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000
-0.000000	4.000000	4.000000

3. 応用

以上の議論を踏まえて、もう少し複雑な関数を離散フーリエ変換してみよう。

$$f(t) = 1 + \cos(2\pi 100t) + 0.1\sin(2\pi 200t) \tag{9}$$

要素数 N を使って、離散化すると

$$f(n) = 1 + \cos(2\pi 100n/N) + 0.1\sin(2\pi 200n/N) \tag{10}$$

となる。次図が要素数 256 で分割した $f(n)$ である。

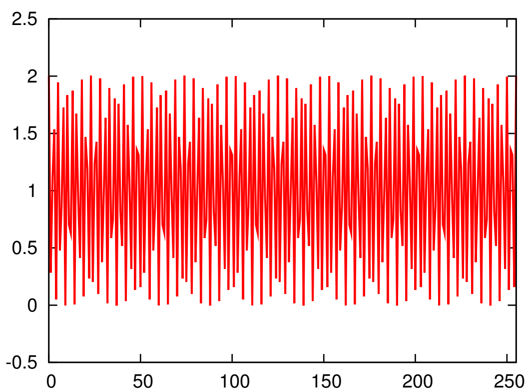

Fig. 2　離散グラフ (N=256)

(5), (6) 式を用いて離散フーリエ変換すれば

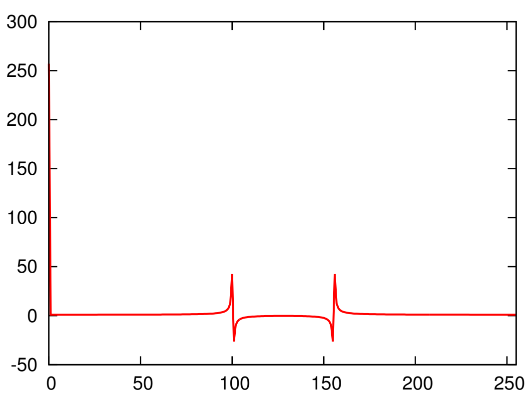

Fig. 3　実数部

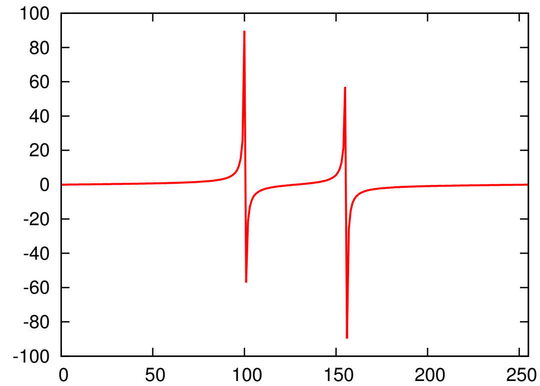

Fig. 4　虚数部

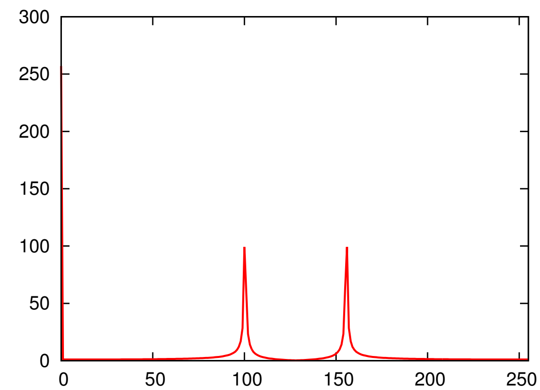

Fig. 5　絶対値