ローレンツ変換の導出

基本原理

アインシュタインは特殊相対性理論を構築する際、次の 2 つの要請を基本原理として認めることから始めた。

- すべての慣性系は、互いに全く同資格である。
- どの慣性系においても、真空中を伝わる光の速さは光源の速度とは無関係に、方向によらず一定である。(光速不変の原理)

今、F$\{x, y, z, t\}$ 系と F$'\{x', y', z', t'\}$ 系の 2 つの座標系について考える (fig.1)。簡単のため $t = t' = 0$ の時 $x = x' = 0$ とする。F$'$ 系は F 系に対して速度 $\boldsymbol{v}$ で並進運動をしている。この時 F 系と F$'$ 系の間にどのような関係、座標変換式があるかを求めたい。

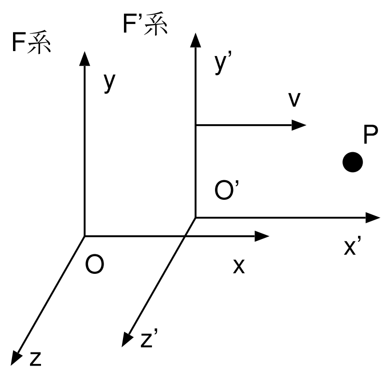

Fig.1.F 系と F$'$ 系

ローレンツ因子

F$'$ 系の x' 軸上の点 P である事象が起こった。その位置と時刻は F 系では $(x, 0, 0, t)$、F$'$ 系では $(x', 0, 0, t')$ と記録される。F$'$ 系における O$'$P の長さは x' である。これを F 系から見た場合、F$'$ 系は vt の位置にいるから O$'$P の長さは $x - vt$ である。このとき x' と x の関係を

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1}$$

と書く。次に F 系の場合を考える。F 系における OP の長さは x である。これを F$'$ 系から見た場合、F 系は $-vt$ の位置にいるから OP の長さは $x + vt$ である。同様にして、これを

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{2}$$

と書く。今、F 系と F$'$ 系の関係を求めたいのだから、未知数である γ が求まればよい。γ を求めるには、光速不変の原理を適用する。光速不変の原理より

$$x = ct, \qquad x' = ct' \tag{3}$$

(1), (2) 式に (3) 式を代入すると

$$x' = \gamma\Big(x - v\frac{x}{c}\Big) = \gamma x\Big(1 - \frac{v}{c}\Big) \tag{4}$$

$$x = \gamma\Big(x' + v\frac{x'}{c}\Big) = \gamma x'\Big(1 + \frac{v}{c}\Big) \tag{5}$$

(4), (5) 式の両辺を掛け算する。

$$x'x = \gamma^2 x'x\Big(1 - \frac{v}{c}\Big)\Big(1 + \frac{v}{c}\Big) = \gamma^2 x'x\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big) \tag{6}$$

(6) 式の両辺を $x'x$ で割れば

$$1 = \gamma^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big) = \gamma^2\Big(1 - \beta^2\Big) \tag{7}$$

となる。ここで $\beta = v/c$ と置いた。したがって (7) 式より γ は

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Big(\beta = \frac{v}{c}\Big) \tag{8}$$

となる。(8) 式を**ローレンツ因子**という。

ローレンツ変換

求まったローレンツ因子 γ を用いて F 系と F′ 系の関係を求めていく。(8) 式より (1), (2) 式は

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \gamma x - \gamma\Big(\frac{v}{c}\Big)ct = \gamma x - \gamma\beta ct \end{aligned} \tag{9}$$

$$x = \frac{x' + v't}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{10}$$

次に (9), (10) より x' を消し、t' と t, x の関係式を導出する。(10) より

$$x' = x\sqrt{1-\beta^2} - vt' \tag{11}$$

(11) 式に (9) 式を代入し、整理すると

$$t'\sqrt{1-\beta^2} = t - \frac{x}{v}\beta^2 \tag{12}$$

したがって

$$t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma t - \frac{\beta\gamma x}{c} \tag{13}$$

となる。この変換を**ローレンツ変換**という。