

H20 年度 数値計算法 期末テスト

問 1,2 は必須問題です。

問 3,4,5,6 は選択問題です。4 題から 2 題を選択してください。

問 1 以下の空欄部分を埋めよ。

- ・倍精度実数は 部に 1 ビット、 部に 11 ビット、 部に 52 ビット割り当てている。
- ・計算機では数値を有限表のデータで表しているため、誤差が生じる。 部で正確に表現しきれないとき生じる誤差を といい、近い値どうしの減算によって生じる有効桁数減少を という。

問 2 以下のプログラムはモンテカルロ法を用いて円周率を計算するサンプルプログラムである。このプログラムに高速化を施したプログラムを示し、それについて説明せよ。

```
clear all;
rand('seed',0);
n = 10;
for i=1:n
    x(i) = rand();
    y(i) = rand();
end
m = 0;
for i=1:n
    if x(i)^2 + y(i)^2 <= 1
        m = m + 1;
    end
end
p = 4*m/n
```

問 3 関数 $f(x)$ の $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ での値を $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (3-1) $n-1$ 次多項式 $P_{n-1}(x)$ が、 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ を補間点とする $f(x)$ の補間多項式となるための条件を示せ。
- (3-2) $P_{n-1}(x)$ の係数を満たす連立 1 次方程式の係数行列を示せ。
- (3-3) 補間多項式と最小二乗近似によって求めた多項式の補間点に対する性質の違いを説明せよ。

問 4 $\sin(x)$ のマクローリン展開を途中で切った多項式を用いて、 $\sin(x)$ の近似値を計算する。以下の問いに答えよ。

- (4-1) 展開式の第 k 項を $a_k = (-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)!$ とおいたとき a_k と a_{k+1} の関係を示せ。
- (4-2) マクローリン展開を用いた時、 x の絶対値が大きいと精度が得られない。この問題を改善する方法と、改善可能である理由を述べよ。
- (4-3) 次の命題についてそれぞれの行について説明せよ。

1 行) $x = \text{linspace}(-5*\pi, 5*\pi, 200);$

2 行) $x = \text{mod}(x, 2*\pi);$

3 行) $k = \text{find}(x \geq \pi);$

4 行) $x(k) = 2*\pi - x(k);$

問 5 連立 1 次方程式 $Ax = b$ を以下の設問に従って解け。ただし計算過程も示し、 A と b を以下のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -4 & 11 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

- (5-1) A を LU 分解せよ。
- (5-2) LU を用いて前進代入及び、後進代入を用い、 x を求めよ。

問 6 非線形方程式 $f(z) = 0$ を、ニュートン法を用いて解くことを考える。

- (6-1) 適当な近似解 z_0 における $f(z)$ のテイラー展開を示せ。
- (6-2) (6-1) で得られたテイラー展開の 2 次以上の項を打ち切った 1 次式を $g(z)$ とおく。ここで $g(z) = 0$ となる z を z_1 とすることでニュートン法の反復式を示せ。
- (6-3) ニュートン法においてどのような条件で反復を停止するとよいのか求めよ。