線形代数学第一　期末試験

2012 年 7 月 31 日 (火) 10:45 - 12:15

(黒川)

$\boxed{1}$　$n \geq 2$ とし,A を n 次正方行列,$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ji})_{i,j=1,\cdots,n}$ をその余因子行列とする. ここで,$\tilde{a}_{ij}$ は (i,j) 余因子である. 次を証明せよ.

(1)A が正則のとき $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$

(2)$\tilde{A} = O \Longleftrightarrow A$ の階数が $n-2$ 以下

(3)$\tilde{A}$ が正則 $\Longleftrightarrow A$ が正則

$\boxed{2}$　実数 x, y に対して

$$B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & x \\ y & x & y & 0 \\ 0 & y & x & y \\ x & 0 & y & x \end{pmatrix}$$

とする.

(1)B の行列式を求めよ. できるだけ因数分解せよ.

(2) 小行列式に注目して B の階数を求めよ.

(3)B の階数を (x,y) 平面に図示せよ.

$\boxed{3}$　$n \geq 3$ に対して,$x_1, \cdots, x_n$ は相異なる実数とし,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

とする.

(1)$\det C = \varDelta(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\prod_{j>i}(x_j - x_i)$ を示せ.

(2) 多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ であって $f(x_j) = x_j^n \quad (j = 1, \cdots, n)$ となる $f(x)$ がただ一つ存在することを示せ.

(3)$f(x) = x^n - (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ であることを示せ.

(4)C の n 列目を $\begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix}$ で置き換えた行列を D とする. クラメルの公式を用いて,$f(x)$ の x^{n-1} の係数を見ることによって

$$\det D = (\det C)(x_1 + \cdots + x^n)$$

となることを示せ.