

線形代数学第二 期末試験 略解

2009 年 2 月 3 日 (火) 10:40 - 12:10

(黒川)

1

(1)

$$\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & x & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = \boxed{x^3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$$

(2)

$$\Phi_A(x) = (x+1)\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) \text{ だから固有値は } \boxed{-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}}$$

(3)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} + z \\ \frac{x+z}{2} \\ x + \frac{y}{2} \end{pmatrix} \text{ だから固有ベクトルは次の通り.}$$

$$\bullet A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad (c \in \mathbb{R} - \{0\})$$

$$\bullet \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ とおくと } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{c \begin{pmatrix} 1 \\ 2(\alpha - 1) \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (c \in \mathbb{R} - \{0\})$$

(4)

$$xy + yz + 2zx = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ だから,}$$

$$\text{最大値は } A \text{ の最大固有値 } \boxed{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} \text{ である.}$$

$$\text{最小値は } A \text{ の最小固有値 } \boxed{-1} \text{ である.}$$

(5)

$$(3)(4) \text{ より最大値を与える } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ は}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ か } \cup x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ より } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\pm \frac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{最小値を与える } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ は}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ か } \cup x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ より } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

2

(1)

$$\Phi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -a & 0 \\ -b & x & -b \\ 0 & -a & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1)^2 - 2ab(x-1) = \boxed{(x-1)(x^2 - x - 2ab)}$$

(2)

(1) より固有値は $1, \frac{1 \pm \sqrt{1+8ab}}{2}$

(3)

$ab < 0$ だから固有値に重複が起こるのは, (2) より $ab = -\frac{1}{8}$ のときに固有値が $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ となる場合だけである. 以下 $b = -\frac{1}{8a}$ とする. このとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ay \\ -\frac{x+z}{8a} \\ ay+z \end{pmatrix} \text{ だから, 固有ベクトルは次の通り.}$$

$$\bullet A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2a} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{C} - \{0\})$$

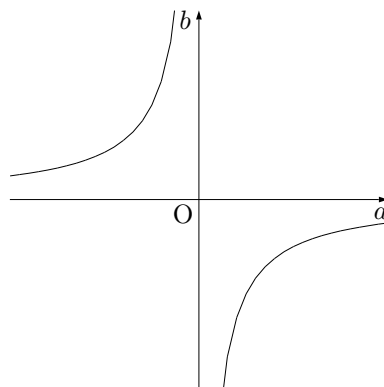
$$\bullet A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{C} - \{0\})$$

(4) $ab \neq -\frac{1}{8}$ のときは固有値 3 個に重複ないので対角化可能である.

$ab = -\frac{1}{8}$ のときは (3) より固有ベクトルの張る空間は $\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2a} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ という 2 次元空間であり,

$\mathbb{C}^3$ ではないので対角化不可能である. よって答えは $\boxed{ab = -\frac{1}{8}}$

図は双曲線.



(5)

$$AA^* = \begin{pmatrix} a^2+1 & b & a^2 \\ b & 2b^2 & b \\ a^2 & b & a^2+1 \end{pmatrix}, A^*A = \begin{pmatrix} b^2+1 & a & b^2 \\ a & 2a^2 & a \\ b^2 & a & b^2+1 \end{pmatrix}$$

より A : 正規 $\iff AA^* = A^*A \iff a = b$

したがって, $ab < 0$ のとき A は正規ではない.

3

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(M(\sigma^m)) &= \sum_{i=1}^n \delta_{i\sigma^m(i)} \\ &= [\sigma^m(i) = i \text{ となる } i \text{ の個数}] \\ &= |\mathrm{Fix}(\sigma^m)|\end{aligned}$$

(2)

$M(\sigma)$ は各行各列に 1 が 1 つで他は 0 という行列である. また, 列ごとの 1 の場所は異なる.

したがって, $M(\sigma)$ の列ベクトルは正規直交する. つまり, $M(\sigma)$ はユニタリ行列である.

よって, $M(\sigma)$ の固有値の絶対値はすべて 1.

(3)

$$\begin{aligned}\zeta_\sigma(s) &= \infty \\ \iff \det(E_n - M(\sigma)e^{-s}) &= 0 \\ \iff \det(e^s E_n - M(\sigma)) &= 0 \\ \iff e^s \text{ は } M(\sigma) \text{ の固有値} \\ \implies |e^s| &= 1\end{aligned}$$

(2)

ここで, $|e^s| = e^{\mathrm{Re}(s)}$. よって $\mathrm{Re}(s) = 0$.