

線形代数学第二 中間試験

2008 年 12 月 9 日 (火) 10:40 - 12:00

(黒川)

1 自然数 $n \geq 1$ と複素数 c に対して

$$V_n(c) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ の各行} \cdot \text{各列の和は } c \}$$

とおく. ただし, $M_n(\mathbb{C})$ は n 次正方行列全体からなる線形空間である.

(1) $A, B \in V_n(c)$ ならば $A + B \in V_n(2c)$ となることを示せ.

(2) $V_n(c)$ が $M_n(\mathbb{C})$ の線形部分空間となる c は $c = 0$ のみであることを示せ.

(3) $V_2(0)$ の基底と次元を求めよ.

(4) $V_3(0)$ の基底と次元を求めよ.

(5) $V_n(0) (n \geq 4)$ の次元を求めよ.

2 次の漸化式を満たす複素数列からなる空間を考える:

$$V = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, 3, \dots) \}$$

(1) V は自然に線形空間となることを示せ.

(2) V の基底と次元を求めよ.

3 $\mathbb{C}^3$ の線形部分空間

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} \\ W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

を考える.

(1) W_1, W_2 の基底と次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元を求めよ.

4 高々 2 次の多項式全体の作る線形空間

$$V = \{ f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C} \}$$

を考える. 写像 $\varphi: V \rightarrow V$ を

$$\varphi(f(t)) = f(t) + t f'(t)$$

によって決める.(ただし, $f'(t)$ は微分を意味する.)

(1) $\{1, t, t^2\}$ は V の基底であることを示せ.

(2) (1) の基底に関して φ を行列表示せよ.