

線形代数学第二 期末試験

2009 年 2 月 3 日 (火) 10:40 - 12:10

(黒川)

1 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) A の固有多項式 (特性多項式) $\Phi_A(x) = \det(xE_3 - A)$ を求めよ.
- (2) A の固有値 (特性根) をすべて求めよ.
- (3) A の $\mathbb{R}^3$ における固有ベクトルをすべて求めよ.
- (4) 実数 x, y, z が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たして動くとき $xy + yz + 3zx$ の最大値と最小値を求めよ.
- (5) (4) において最大値・最小値を与える x, y, z をすべて求めよ.

2 実数 a, b が $ab < 0$ を満たしているとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

- (1) A の固有多項式 (特性多項式) $\Phi_A(x)$ を求めよ.
- (2) A の固有値 (特性根) をすべて求めよ.
- (3) A の固有値 (特性根) に重複がある場合に A の $\mathbb{C}^3$ における固有ベクトルをすべて求めよ.
- (4) A が体格化不可能となる (a, b) をすべて求め、 xy 平面上に図示せよ.
- (5) A は正規行列となることを示せよ.

3 $\{1, \dots, n\}$ の置換 σ に対してゼータ関数

$$\zeta_\sigma(s) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\text{Fix}(\sigma^m)|}{m} e^{-ms} \right)$$

を考える. ここで $|\text{Fix}(\sigma^m)|$ は $\sigma^m(i) = i$ となる $i = 1, \dots, n$ の個数を表す. いま, n 次正方行列 $M(\sigma^m)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) を

$$M(\sigma^m) = (\delta_{i\sigma^m(j)})_{i,j=1,\dots,n}$$

とおく. ただし,

$$(\delta_{i\sigma^m(j)}) = \begin{cases} 1 & \dots & i = \sigma^m(j) \text{ のとき} \\ 0 & \dots & i \neq \sigma^m(j) \text{ のとき} \end{cases}$$

- (1) 跡公式 $\text{tr}(M(\sigma^m)) = |\text{Fix}(\sigma^m)|$ を示せ.
- (2) $M(\sigma)$ の固有値はすべて絶対値が 1 であることを示せ.
- (3) 行列式表示 $\zeta_\sigma(s) = \det(E_n - M(\sigma)e^{-s})^{-1}$ を用いて, $\zeta_\sigma(s)$ が無限大となる複素数 s はすべて実部が 0 になること (リーマン予想の類似物) を示せ.