線形代数学 第二 U 組 (6 類) 期末試験 略解

作成者：さかな

2011 年 2 月 2 日 (水) 実施

$\boxed{1}$ (1) $\Phi_A(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$

(2) 1, 2, −2

(3) $x^2 + 4yz = A[\mathbf{x}]$ なので，$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき，最大 (小) 値は最大 (小) の固有値．よって最大値：2，最小値：−2

(4) 2 に対する固有ベクトルはのうち，$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすものが $A[\mathbf{x}]$ を最大にするベクトルであり，それは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である．−2 についても同様に，$\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ が得られる．

$\boxed{2}$ (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}c & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\Phi_A(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}c\right)\left(x^2 - \dfrac{1}{2}cx - \dfrac{1}{2}\right)$ より，$c \geq 0$ のときは最大の固有値は $\dfrac{c+\sqrt{c^2+8}}{4}$，最小の固有値は $-\dfrac{1}{2}c$ である．したがって，$c = \dfrac{7}{2}$ とすればよい．$c < 0$ のときは，$\dfrac{c-\sqrt{c^2+8}}{4}$ のみ負であるから，最小固有値は $\dfrac{c-\sqrt{c^2+8}}{4} = -\dfrac{7}{4}$ であり，$c = -\dfrac{41}{14}$ とすればよい．しかしこのとき，他の固有値のうち最大のものは 2 ではない．よって不適．

$\boxed{3}$ (1) $\Phi_A(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)$

(2) $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

(3) 最大値は最大固有値の $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，最小値は最小固有値の $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{4}$ (1) $\Phi_A(x) = x^3 - abc = (x - (abc)^{1/3})(x^2 + (abc)^{1/3}x + (abc)^{2/3})$ より，固有値は $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ として $(abc)^{1/3}, (abc)^{1/3}\omega, (abc)^{1/3}\omega^2$ である．$abc \neq 0$ なら，3 つの根はすべて異なるので，重根となる場合 $abc = 0$ である．

(2) $abc = 0$ のとき，固有値は 0(重複度 3) である．このとき，固有空間 $W(0)$ は $a = b = c = 0$ の場合を除いて 2 次元以下である (確認しよう！)．よって $a = b = c = 0$ 以外では対角化できない．$a = b = c = 0$ とすると，$\dim W(0) = 3$ なので，対角化可能である．$abc \neq 0$ のとき，(1) で述べたとおり，3 つの異なる固有値があるので，対角化できる．以上から，求

める組は $s, t, u \in \mathbb{C}$ を任意定数として，$(s, 0, 0), (0, t, 0), (0, 0, u), (s, t, 0), (s, 0, u), (0, t, u)$ である.