

線形代数学第二 中間試験略解

2012 年 11 月 27 日 (火) 10:45 - 12:15

(黒川)

□ (1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{基底は } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{次元は } 3.$$

[基底は別のものでも良い：以下も同様.]

(2) $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{基底は } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \text{次元は } 3.$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_4 \end{cases} \quad \text{だから}$$

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{基底は } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{次元は } 2.$$

(4) 次元公式 $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$

に (1)-(3) を用いると $\dim(W_1 + W_2) = 4$ とわかる.

したがって, $W_1 + W_2 = \mathbb{C}^4$, 基底は $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

[次元公式を用いずに直接, 基底を用いてもよい.]

□ (1) まず, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が線形独立であることを示す.

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \text{ とすると } \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. したがって線形独立. よって, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ にベクトルを何個か加えることによって $\mathbb{C}^3$ の基底にできるが, $\mathbb{C}^3$ は 3 次元なので, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ はそのまま基底となる.

$$(2) \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□ 3 (1) 答えは A .

計算: $f_A(\mathbf{e}_j) = A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_i$ だから, 求める行列は $(a_{ij})_{i,j} = A$.

(2) まず $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ が線形独立であることを示す.

$$c_1\mathbf{p}_1 + \dots + c_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0} \text{ とすると } P \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって, $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ は線形独立. よって, 何個かベクトルを加えることによって $\mathbb{C}^n$ の基底にできるが, $\mathbb{C}^n$ は n 次元なので, $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ はそのまま基底となる.

(3) 答えは $P^{-1}AP$. 計算:

$$f_A(\mathbf{p}_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij}\mathbf{p}_i \text{ となる行列 } (c_{ij})_{i,j} = C \text{ を求めればよい. この条件は } A\mathbf{p}_i = P \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} \text{ と同じことなの}$$

で, $AP = PC$ となる. よって, $C = P^{-1}AP$.

$$(4) \dim \operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{rank}(A)$$

$$\dim \operatorname{Ker}(f_A) = n - \dim \operatorname{Im}(f_A) = n - \operatorname{rank}(A)$$