線形代数学第二　中間試験

2012 年 11 月 27 日 (火) 10:45 - 12:15

(黒川)

$\boxed{1}$

$$V = \mathbb{C}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C} \right\}$$

とし,

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

とおく.

(1)W_1 の基底と次元を求めよ.

(2)W_2 の基底と次元を求めよ.

(3)$W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

(4)$W_1 + W_2$ の次元と基底を求めよ.

$\boxed{2}$ $\mathbb{C}^3$ に通常の内積を入れて考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1)$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底となることを示せ.

(2)$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ を正規直交化せよ.

$\boxed{3}$ $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列とし,

$$f_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

を A 倍写像とする. また,$P = (\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$ を n 次正則行列とする.

(1)f_A を $\mathbb{C}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ について行列表示せよ.

(2)$\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底となることを示せ.

(3)f_A を $\mathbb{C}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ について行列表示せよ.

(4)f_A の核 $\mathrm{Ker}(f_A)$ と像 $\mathrm{Im}(f_A)$ の次元を A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ によって表示せよ.