

線形代数学第一 中間試験

2012 年 6 月 5 日 (火) 10:45 - 12:15

(黒川)

[1] $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

とする.

- (1) $a = 0$ のとき A を基本変形し, 標準形と階数を求めよ. 基本変形を明記せよ.
- (2) $a \neq 0$ のとき A を基本変形し, 標準形と階数を求めよ. 基本変形を明記せよ.
- (3) A の階数の取り得る値を示せ.
- (4) A の階数を (a, b) 平面に図示せよ.

[2]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

- (1) A は正則行列であることを示し, 逆行列を求めよ. 計算も記せ.
- (2) 正の整数 m に対して A^m を求めよ. 推測だけでなく, 証明せよ.
- (3) 負の整数 m に対して A^m を求めよ. 推測だけでなく, 証明せよ.

[3] 写像 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が, 次の条件を満たすものとする:

すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

ただし, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は内積である.

(1) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|\varphi(c\mathbf{x}) - c\varphi(\mathbf{x})\|^2$$

を求めよ.

(2) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}))\|^2$$

を求めよ.

(3) ある直交行列 A によって $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となることを示せ.