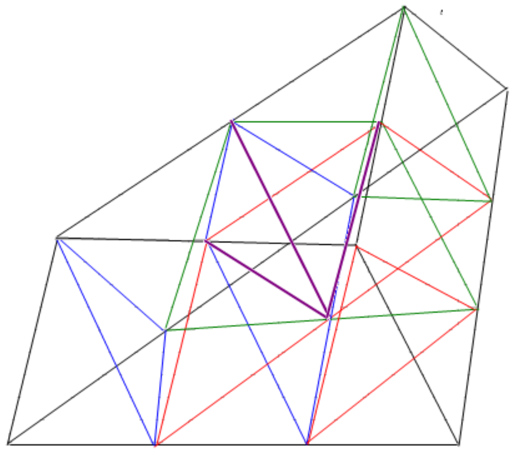
東京工業大学 AO $\boxed{\textbf{II-1}}$

正四面体を、底面に平行な $(n-1)$ 枚の平面で高さを n 等分するように切る。残りの面に関しても同様に切ると正四面体はいくつの部分に分かれるか、個数を求めよ。

解答



床に正四面体 $(ABCD)$ の面 (BCD) が下になるようにおく。

この状態で $(n-1)$ 枚の平行な平面で正四面体を n 等分するように切ると床に対して上向きの正四面体、下向きの正四面体、正八面体の 3 つの立体に切り分けられる。

A から BCD にたいして k 段目の一番大きな正三角形 $B'C'D'$ は平面により、上向きの正三角形 $(\triangle)$、下向きの正三角形 $(\bigtriangledown)$ に分割される。右上図から $\triangle$ の数が上向きの四面体、$\bigtriangledown$ の数が正八面体、$B'C'D'$ 内部にある点の数が下向きの正四面体の数にそれぞれ対応するので k 段目にある

$\triangle$ の数は $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

$\bigtriangledown$ の数は $1+2+3+\cdots+(k-1)=\dfrac{k(k-1)}{2}$

$B'C'D'$ 内部にある交点の数は $1+2+3+\cdots+(k-2)=\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$

したがって切り分けられる立体の総数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\right\}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(k^2-k)+2}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k-1)-k(k-1)(k-2)\}+n\\&=\frac{n^3-n}{2}+n=\underline{\frac{n^3+n}{2}}\end{aligned}$$