問 II-2

p を正数とし、S を $y^2 = 4px$ と表示される放物線とする。点 $P = (a, b)$ から S への法線が何本ひけるか、場合わけして述べよ。

まず、図を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して考える。このとき方程式は、$y = \dfrac{1}{4p}x^2$ となる。この曲線の $x = t$ における接線の方程式は、

$$y = -\frac{2p}{t}(x - t) + \frac{1}{4p}t^2$$

となる。ここで、$f(x, y, t) = y + \dfrac{2p}{t}(x - t) - 2p - \dfrac{1}{4p}t^2$ としたとき、曲線群 $f(x, y, t) = 0$ の各曲線は、$f(x, y, t) = 0$ と $f_t(x, y, t) = 0$ から t を消去した曲線に接している（包絡線)。なお、$f_t(x, y, t)$ とは $f(x, y, t)$ を t について微分（偏微分）したものである。この 2 つの連立方程式から t を消去すると

$$y = 2p + \frac{2px}{\sqrt[3]{4p^2x}} + \frac{1}{4p}\sqrt[3]{16p^4x^2}$$

が得られる。よって、これを $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転した曲線

$$x = 2p + \frac{2py}{\sqrt[3]{4p^2y}} + \frac{1}{4p}\sqrt[3]{16p^4y^2} \tag{1}$$

について、

$$\begin{cases} 3\,本 & \cdots \quad x > F(y)\ のとき \\ 2\,本 & \cdots \quad x = F(y)\ のとき \\ 1\,本 & \cdots \quad x < F(y)\ のとき \end{cases}$$

となる。■

0．3 による解説

暫定の解答のため、包絡線の知識を使う解答方法にしました。最後に (1) のグラフを書かなければいけないが、正確に書く必要はなく、雰囲気で書いていいと思います。なお、wiki にグラフを載せました。参考にしてください。