東京工業大学 1994 年（前期）数学 「150 分・250 点」 page1/2

免責：0. 3 ◆ BWCElEJ312 (yokoyama.s.ab@m.titech.ac.jp)

$\boxed{1}$ [放物線の接線の交点の軌跡] (50/250)

放物線 $y = x^2$ を C とし、2 つの異なる点 P,Q は C 上を動くものとする。直線 PQ と C とで囲まれる図形の面積が、一定の値 $\dfrac{1}{6}$ をとるとき、曲線 C の P における接線と Q における接線との交点 R は、どのような曲線状を動くか。その方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ [双曲線の回転、三角比] (50/250)

双曲線 $xy = -2$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}\left(t, -\dfrac{2}{t}\right)$ $(t \neq 0)$ を、原点を中心とし反時計回りに角度 θ だけ回転した点を Q とする。

(1) Q の座標を θ と t とを用いて表せ。

(2) θ を固定し P が C 上を動くとき、Q はどのような曲線をえがくか。その方程式を求めよ。

(3) Q のえがく曲線が、点 $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$ を通るような θ の値を、$0 < \theta < 2\pi$ の範囲ですべて求めよ。

$\boxed{3}$ [定積分の計算、無限等比級数の和] (50/250)

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| \, dx$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [群数列] （50/250）

２つの負でない整数 m, n に対して、和

$$\left(\sum_{k=1}^{m+n} k\right) + n$$

を考え、これを $f(m, n)$ と書くことにする。ただし $f(0, 0) = 0$ とする。

(1) $f(m, n) \leqq 5$ をみたす点 (m, n) の位置を、座標平面上に図示せよ。

(2) $f(m, n) = f(m', n')$ ならば $(m, n) = (m', n')$ であることを示せ。

$\boxed{5}$ [２変数関数の最小値] （50/250）

放物線 $y = x^2$ 上の点 P と、放物線 $y = -x^2 - 16x - 65$ 上の点 Q に対して、線分 PQ を考える。このとき線分 PQ の長さの最小値を求めよ。