

1 [数列の極限、整数に関する論証] (60/250)

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して数列

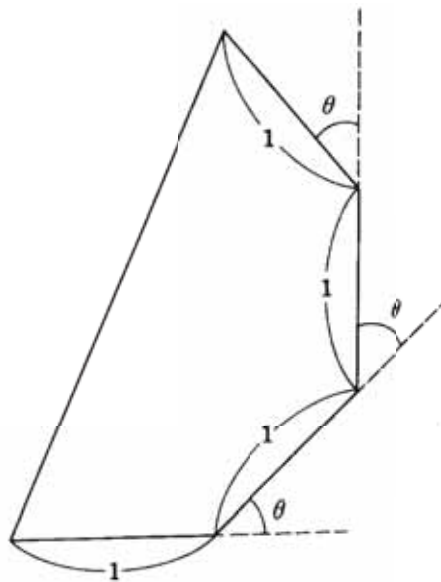
$$a(n) = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n!}$$

を考える。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ を求めよ。
- (2) $a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。
- (3) 積 $a(1)a(2) \cdots a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

2 [図形の面積、三角関数、最大・最小] (60/250)

下図のような 4 辺の長さが 1 で、それらのなす外角が θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) であるような五角形の面積の最大値を求めよ。



3 [関数のグラフ、極限值に関する論証] (60/250)

n を自然数とする。

(1) $f(x) = \frac{x^2}{n^2} + e^{2x} - 1$ の増減を調べ、グラフの概形を描け。

(2) だ円 $\frac{x^2}{n^2} + n^2y^2 = 1$ と曲線 $y = \frac{1}{n}x^x$ の交点のうち $(0, \frac{1}{n})$ でない方の座標を (x_n, y_n) とおく。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = -1$$

であることを示せ。

4 [期待値、数列和の計算] (70/250)

1 から n までの数字を書いたカードが 1 枚ずつある。ただし、 $n \geq 3$ とする。

(1) この n 枚のカードから無作為に同時に 2 枚のカードを取り出すとき、書かれた数の積の期待値 E を n で表せ。

(2) この n 枚のカードから無作為に同時に 3 枚のカードを取り出すとき、書かれた数の積の期待値を $E(n)$ で表す。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n)}{n^3}$$

を求めよ。