東京工業大学 1996 年（前期）数学 「150 分・250 点」 page1/2

免責：0. 3 ◆ BWCElEJ312 (yokoyama.s.ab@m.titech.ac.jp)

$\boxed{1}$ [整数に関する論証問題] （60/250）
2 以上の整数 $n$ に対して方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

の正の整数解（$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$）を考える。ただし、例えば（1,2,3）と（3,2,1）は異なる解とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) $n = 2$ および $n = 3$ のときの解をすべて求めよ。

(2) 解が 1 つしかないような $n$ をすべて求めよ。

(3) 任意の $n$ に対して解は少なくとも 1 つ存在し、かつ有限個しかないことを示せ。

$\boxed{2}$ [楕円を保存する 1 次変換、行列の $n$ 乗] （60/250）
$p = \cos\theta\ (0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ とし、$q, r, s$ を整数とする。また、行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とする。$A$ で表される 1 次変換により、だ円 C：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{（ただし } a, b > 0\text{）}$$

上の点は C 上の点にうつるものとする。このとき次の問に答えよ。

(1) 行列 $A$ を $\theta, a, b$ を用いて表せ。

(2) 自然数 $n$ に対し $A^n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [定積分と面積] （60/250）

関数 $f(x) = px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ が $x=1$ で極値 1 をとり、さらに $x$ 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる面積が有限な 2 つの部分の面積が等しいとする。このとき次の問に答えよ。

(1) $0 < \alpha < \beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(2) $\alpha < 0 < \beta$ のとき $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [微分方程式] （70/250）

関数 $f(x)$ は微分可能で次の（イ）（ロ）（ハ）を満たすものとする。

（イ） $x \geqq 0$ のとき $f'(x) > 0$、

（ロ） $f(0) = a$ （ただし、$a > 1$)、

（ハ） 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t, f(t))$ $(t \geqq 0)$ における接線と $x$ 軸との交点を Q、法線と $x$ 軸との交点を R としたとき、線分 QR の長さ $F(t)$ は関係式

$$\frac{F(t)}{f(t)} = \frac{f(t)}{f'(t)}$$

をみたす。このとき次の問に答えよ。

(1) $x > 0$ で $f'(x)$ は単調増加で、$h > 0$ に対し

$$f(x+h) - f(x) \geqq \sqrt{a-1}h$$

をみたすことを示せ。

(2) 点 P が曲線 $y=f(x)$ $(x \geqq 0)$ 上を動くとき $F(t)$ の最小値を求めよ。