

Chapter 1

イントロダクション

弾性体力学

連続弾性体の力学

連続体

質点の集合体

微視的な不連続性を無視する

$$\frac{\rho(\mathbf{r})}{\partial \rho(\mathbf{r})}$$

弾性体

剛体運動の支配方程式

= 質点系の運動方程式

1. 重心の並進運動

$$M \frac{d^2 R_i}{dt^2} = F_i \quad (1.1)$$

2. 重心回りの回転運動

$$\frac{dL_i}{dt} = M_i \quad (1.2)$$

$$L_i = \int_V e_{ijk} (r_j - R_j) \rho \dot{r}_k dV, \quad (1.3)$$

or

$$\mathbf{L} = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \rho(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (1.4)$$

$$M_i = \int_V e_{ijk} (r_j - R_j) F_k dV, \quad (1.5)$$

or

$$\mathbf{M} = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (1.6)$$

連続弾性体の支配方程式

質点系の支配方程式+変形に関する方程式

- 質量保存の式
- 構成方程式 (変形の様式を規定する式)

ベクトル・テンソルの復習

ベクトル量・テンソル量

ベクトル量

座標軸 (方位) 毎に成分が定義される.

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 \quad (1.7)$$

テンソル量

座標軸の組み合わせ毎に成分が定義される.

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{11} (\mathbf{i}_1 \uparrow \mathbf{i}_1) + \tau_{12} (\mathbf{i}_1 \uparrow \mathbf{i}_2) + \tau_{13} (\mathbf{i}_1 \uparrow \mathbf{i}_3) + \cdots \quad (1.8)$$

(ストレステンソルを例として)

座標軸の回転を表す行列

2次元座標の回転

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} : \text{座標回転を表す行列} \quad (1.9)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

3次元座標の回転

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

直行行列

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T) \quad (1.12)$$

スカラー量

ただ 1 つの成分を持ち, その成分が座標系の回転に対し 不変である量.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi'(x'_1, x'_2, x'_3) \quad (1.13)$$

ベクトル量

座標系の回転に対し 成分が以下のように変換される量.

$$\Psi'_i = \sum_j Q_{ij} \Psi_j \quad (1.14)$$

2階のテンソル量

座標系の回転に対し 成分が以下のように変換される量.

$$\tau'_{ij} = \sum_m \sum_n Q_{im} Q_{jn} \tau_{mn}, \quad (1.15)$$

or

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau} \mathbf{Q}^T \quad (1.16)$$

4階のテンソル量

座標系の回転に対し 成分が以下のように変換される量.

$$C'_{ijkl} = \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} C_{mnpq} \quad (1.17)$$

内積・外積

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \delta_{ij} u_i v_j = u_i v_i \quad (1.18)$$

クロネッカーのデルタ (Kronecker delta)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (1.19)$$

和の規約 (Einstein summation convention)

同じ項で添字が繰り返される場合は, その添字の和をとる.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (1.20)$$

$$w_i = e_{ijk} u_j v_k \quad (1.21)$$

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k \text{ が } 1,2,3 \text{ の偶置換のとき}) \\ -1 & (i,j,k \text{ が } 1,2,3 \text{ の奇置換のとき}) \\ 0 & i,j,k \text{ のいずれか } 2 \text{ つか等しいとき} \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\begin{pmatrix} e_{jik} = -e_{ijk}, & e_{ikj} = -e_{ijk} \\ e_{kij} = -e_{ikj} = e_{ijk} \\ e_{ijk} e_{ij'k'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad (1.24)$$

$$e_{ijk} u_j v_k = e_{ik'j'} u_{k'} v_{j'} = -e_{ij'k'} v_{j'} u_{k'} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (1.26)$$

$$e_{ijk} u_j (v_k + w_k) = e_{ijk} u_j v_k + e_{ijk} u_j w_k \quad (1.27)$$

ベクトル場の微分

$$\nabla = \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.28)$$

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{i}_i = \phi_{,i} \mathbf{i}_i \quad (1.29)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = v_{i,i} \quad (1.30)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{i}_i = e_{ijk} v_{k,j} \mathbf{i}_i \quad (1.31)$$

公式

$$(1) \text{div} (\phi \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi + \phi \text{div} \mathbf{u} \quad (1.32)$$

$$(\phi u_i)_{,i} = u_i \phi_{,i} + \phi u_{i,i} \quad (1.33)$$

$$(2) \text{rot} (\phi \mathbf{u}) = \phi \text{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \text{grad} \phi \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} e_{ijk} (\phi u_k)_{,j} &= e_{ijk} \phi_{,j} u_k + e_{ijk} \phi u_{k,j} \\ &= \phi (e_{ijk} u_{k,j}) - e_{ikj} u_k \phi_{,j} \\ &= \phi e_{ijk} u_{k,j} - e_{ijk} u_j \phi_{,k} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$(3) \text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} (e_{ijk} u_j v_k)_{,i} &= e_{ijk} u_{j,i} v_k + e_{ijk} u_j v_{k,i} \\ &= v_k e_{kij} u_{j,i} - u_j e_{jik} v_{k,i} \\ &= v_i e_{ijk} u_{k,j} - u_i e_{ijk} v_{k,j} \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$(4) \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} - \mathbf{v} \text{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{u} \text{div} \mathbf{v} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}
e_{ijk} (e_{kj'k'} u_{j'} v_{k'})_{,j} &= e_{kij} e_{kj'k'} (u_{j'} v_{k'})_{,j} \\
&= (\delta_{ij'} \delta_{jk'} - \delta_{ik'} \delta_{jj'}) (u_{j'} v_{k'})_{,j} \\
&= (u_i v_j)_{,j} - (u_j v_i)_{,j} \\
&= u_i v_{j,j} + v_j u_{i,j} - v_i u_{j,j} - u_j v_{i,j}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$(5) \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot}\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot}\mathbf{v} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
&v_j u_{i,j} + u_j v_{i,j} + e_{ijk} v_j e_{kj'k'} u_{k',j'} + e_{ijk} u_j e_{kj'k'} v_{k',j'} \\
&= v_j u_{i,j} + u_j v_{i,j} + e_{kij} e_{kj'k'} v_j u_{k',j'} + e_{kij} e_{kj'k'} u_j v_{k',j'} \\
&= v_j u_{i,j} + u_j v_{i,j} + (\delta_{ij'} \delta_{jk'} - \delta_{ik'} \delta_{jj'}) v_j u_{k',j'} + (\delta_{ij'} \delta_{jk'} - \delta_{ik'} \delta_{jj'}) u_j v_{k',j'} \\
&= v_j u_{i,j} + u_j v_{i,j} + v_j u_{j,i} - v_j u_{i,j} + u_j v_{j,i} - u_j v_{i,j} \\
&= v_j u_{j,i} + u_j v_{j,i} = (u_j v_j)_{,i}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$(6) \text{rot rot}\mathbf{u} = \text{grad div}\mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
e_{ijk} (e_{kj'k'} u_{k',j'})_{,j} &= e_{kij} e_{kj'k'} u_{k',j'j} \\
&= (\delta_{ij'} \delta_{jk'} - \delta_{ik'} \delta_{jj'}) u_{k',j'j} \\
&= u_{j,ij} - u_{i,jj} \\
&= (u_{j,j})_{,i} - u_{i,jj}
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$(7) \text{rot}(\text{grad}\phi) = \mathbf{0} \tag{1.44}$$

$$(8) \text{div}(\text{rot}\mathbf{u}) = 0 \tag{1.45}$$

積分定理

線積分と面積分

線積分

曲線 C(絵をかく)

関数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$: 曲線 C 上で定義された 1 価関数

$$\sum_{k=1}^n \{P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k\} \tag{1.46}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

$(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) : (x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$ と (x_k, y_k, z_k) の間の点

$\Delta x_k \rightarrow 0, \Delta y_k \rightarrow 0, \Delta z_k \rightarrow 0$ における極限值:

$$\int_C [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] : \text{線積分} \tag{1.47}$$

一般的に線積分の値は、経路に依存する

$P = A_x(x, y, z), Q = A_y(x, y, z), R = A_z(x, y, z)$ の時,

$$\int_C [A_x(x, y, z)dx + A_y(x, y, z)dy + A_z(x, y, z)dz] = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.48}$$

関数 $F(x, y, z)$: 曲線 C 上で定義された 1 価関数

$$\sum_{k=1}^n \{F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k\}, \quad \Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2} \tag{1.49}$$

$\Delta s_k \rightarrow 0$ の極限值:

$$\int_C F(x, y, z) ds : \text{弧長に関する線積分} \quad (1.50)$$

面積分

曲面 S (絵をかく)

関数 $\phi(x, y, z)$: 曲面 S 上で 1 価連続関数

$$\sum_{l=1}^n \phi(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \Delta S_l \quad (1.51)$$

ΔS_l : S 上の微小要素の面積, (ξ_l, η_l, ζ_l) : ΔS_l 上の点

$\Delta S_l \rightarrow 0$ の極限值:

$$\int_S \phi(x, y, z) dS : \text{面積分} \quad (1.52)$$

ベクトル関数 $\mathbf{A}(x, y, z)$: 曲面 S 上で 1 価連続関数

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S A_i n_i dS : \mathbf{A} \text{ の面積分} \quad (1.53)$$

$\mathbf{n}$: 外側に向く単位法線ベクトル

体積積分

$$\int_V \phi(x, y, z) dV \quad (1.54)$$

$$\int_V \mathbf{A}(x, y, z) dV \quad (1.55)$$

線積分の性質

$\mathbf{A} = \nabla U$ のとき,

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\nabla U) \cdot d\mathbf{r} = U(Q) - U(P) \quad (1.56)$$

(P :始点: Q :終点)

曲線 C の軌跡が $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ と書け, P, Q はそれぞれ $t = a, t = b$ とあるとすると,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} dt \\ &= \int_C \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{t=a}^{t=b} \frac{dU(x(t), y(t), z(t))}{dt} dt \\ &= U(x(b), y(b), z(b)) - U(x(a), y(a), z(a)) = U(Q) - U(P) \end{aligned} \quad (1.57)$$

積分定理

部分積分

$$\int f g' dx = f g - \int f' g dx \quad (1.58)$$

$$\int_V f g_{,k} dV = \int_S f g n_k dS - \int_V f_{,k} g dV \quad (1.59)$$

n_i : outward normal

ガウスの定理

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.60)$$

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S v_i n_i dS \quad (1.61)$$

div の物理的意味

微小体積 ΔV (表面 ΔS) にたいしてガウスの定理を適用

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.62)$$

なので,

$\operatorname{div} \mathbf{v}$: 単位体積あたりのわきだし量
対称形で表したグリーンの定理

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S (\psi \operatorname{grad} \phi - \phi \operatorname{grad} \psi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.63)$$

$$\int_V (\psi \phi_{,ii} - \phi \psi_{,ii}) dV = \int_V (\psi \phi_{,i} - \phi \psi_{,i}) n_i dS \quad (1.64)$$

ガウスの定理の証明
微小な直方体 ΔV

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_1^+ + \Delta S_1^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= (v_x(x + \Delta x/2, y, z) - v_x(x - \Delta x/2, y, z)) \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta V \end{aligned} \quad (1.65)$$

同様に

$$\int_{\Delta S_2^+ + \Delta S_2^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta V \quad (1.66)$$

$$\int_{\Delta S_3^+ + \Delta S_3^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta V \quad (1.67)$$

したがって

$$\int_{\Delta S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = (\operatorname{div} \mathbf{v}) \Delta V \quad (1.68)$$

任意の 3 次元体積 V , 体積要素 ΔV_l (表面: ΔS_l)

$$\sum_l \int_{\Delta S_l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_l (\operatorname{div} \mathbf{v}) \Delta V \quad (1.69)$$

2つの体積要素が共有する面上では積分が打ち消し合う

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV: \text{ガウスの定理} \quad (1.70)$$

ストークスの定理

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.71)$$

(S を左に観る方向で線積分)

$$\begin{aligned} \int_{c_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= v_x(x, y - \Delta y/2, z) \Delta x + v_y(x + \Delta x/2, y, z) \Delta y \\ &\quad + v_x(x, y + \Delta y/2, z) (-\Delta x) + v_y(x - \Delta x/2, y, z) (-\Delta y) \\ &= -\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x \Delta y = (\operatorname{rot} \mathbf{v})_z \Delta x \Delta y \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\sum_k \int_{c_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_k (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k \quad (1.73)$$

2つの面積要素が共有する線上では積分が打ち消し合う

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.74)$$

rot の物理的意味

微小面積 ΔS (その周 ΔC) にストークスの定理を適用

$$\text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.75)$$

rot $\mathbf{v}$: $\mathbf{v}$ がどれだけ渦状であるかの尺度

変位 $\mathbf{u}$ に対し

div $\mathbf{u} \neq 0$: 体積変化がある

rot $\mathbf{u} \neq 0$: ねじれがある

ストークスの定理から導かれる性質

すべての閉曲線 C に対し $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ となる必要十分条件は、恒等的に $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ が成り立つことである。

始点 P を終点 Q とする線積分 $\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ が経路に依存しない必要十分条件は、 $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。

e.g.) 力 $\mathbf{F}$ が保存力 $\Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 。

$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ である必要十分条件は $\mathbf{A} = \nabla U$ を満たす U が存在することある。

e.g.) 力 $\mathbf{F}$ が保存力 $\Leftrightarrow \mathbf{F} = \nabla \phi$ を満たすポテンシャル ϕ が定義できる。

Chapter 2

連続体力学の構成

変形の表現: 歪み (strain)

ラグランジュ表現とオイラー表現

質点の位置 $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

($\mathbf{X}$: $t = 0$ における座標点).

$\mathbf{x}$ は $\mathbf{X}$ からの 1 対 1 の写像.

$$J = |\partial x_i / \partial X_i| \neq 0 \quad (2.2)$$

逆変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

ラグランジュ表現: $\mathbf{X}, t$ を独立変数として記述

オイラー表現: $\mathbf{x}, t$ を独立変数として記述

速度 $\mathbf{v}$ (ラグランジュ表現):

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

$$\dot{\phi}: \text{ラグランジュ時間微分を表す} \quad (2.5)$$

加速度 $\mathbf{a}$ (ラグランジュ表現):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

加速度 $\mathbf{a}$ (オイラー表現):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + v\Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ラグランジュ微分のオイラー表現

$$\dot{\phi}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\phi}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_j \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

歪みテンソル

変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.10)$$

基準状態における微小距離 $d\mathbf{X}$ と変形後の距離 $d\mathbf{x}$ の関係:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ &= [\mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)] - [\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

変形勾配を表すテンソル $\mathbf{F}$ と $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.13)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}) d\mathbf{X}, \quad (2.14)$$

or

$$dx_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j \quad (2.15)$$

反対に, 変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

と定義し, 変形勾配を表すテンソル $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t)$ を用いて,

$$d\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{D}}) d\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

or

$$dX_i = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (2.18)$$

以上から,

$$d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - d\mathbf{X} = \mathbf{D}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \quad (2.19)$$

$$d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = d\mathbf{x} - d\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} \right): \mathbf{D} \text{ の対称成分} \\ \theta_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} - \frac{\partial u_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} \right): \mathbf{D} \text{ の反対称成分} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right): \bar{\mathbf{D}} \text{ の対称成分} \\ \bar{\theta}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \right): \bar{\mathbf{D}} \text{ の反対称成分} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

$\epsilon_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}$: 歪みを表すテンソル, $\theta_{ij}, \bar{\theta}_{ij}$: 回転を表すテンソル

他の歪みの定義:

$$dx_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j \quad (2.23)$$

なので,

$$|d\mathbf{x}|^2(\mathbf{X}, t) - |d\mathbf{X}|^2 = 2 E_{ij}(\mathbf{X}, t) dX_i dX_j, \quad (2.24)$$

where

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.25)$$

(Green の歪みテンソル, ラグランジュの歪みテンソル)

$$dX_i = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (2.26)$$

なので

$$|d\mathbf{x}|^2(\mathbf{x}, t) - |d\mathbf{x}|^2 = 2 \bar{E}_{ij}(\mathbf{x}, t) dx_i dx_j, \quad (2.27)$$

where

$$\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.28)$$

(Almansi の歪みテンソル, オイラーの歪みテンソル)
微小変形の場合

$$|u_i| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad (2.29)$$

$$\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} = E_{ij} = \bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.30)$$

$$\theta_{ij} = \bar{\theta}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.31)$$

θ_{ij} は微小剛体回転であることの証明

$$\Theta_k = \frac{1}{2} e_{kij} \theta_{ij} \quad (2.32)$$

$$\left(\boldsymbol{\Theta} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} \right) \quad (2.33)$$

と定義すると, 両辺に e_{klm} をかけると

$$\theta_{lm} = e_{klm} \Theta_k \quad (2.34)$$

$\epsilon_{ij} = 0, \theta_{ij} \neq 0$ のとき,

$$du_i = (\epsilon_{ij} - \theta_{ij}) dx_j = -\theta_{ij} dx_j = -e_{ijk} \Theta_k dx_j = (\boldsymbol{\Theta} \times d\mathbf{x})_i \quad (2.35)$$

(無限変形近似おしまい)

歪み速度テンソル

速度勾配テンソル $\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{x}, t)$ を

$$\bar{\mathbf{L}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.36)$$

と定義すると,

$$d\mathbf{v} = \bar{\mathbf{L}} d\mathbf{x}, \quad (2.37)$$

or

$$dv_i = \bar{L}_{ij} dx_j \quad (2.38)$$

変形速度テンソル e_{ij} , 回転速度テンソル w_{ij} を

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) : \bar{\mathbf{L}} \text{ の対称成分} \quad (2.39)$$

$$\bar{w}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) : \bar{\mathbf{L}} \text{ の反対称成分} \quad (2.40)$$

と定義する.

$D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)/Dt = \mathbf{v}$ なので, $\bar{e}_{ij}$ は歪み速度テンソルと呼ばれている.

$$W_k = \frac{1}{2} e_{ijk} w_{ij}, \quad (2.41)$$

$$\left(\mathbf{W} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \right) \quad (2.42)$$

と定義すると, $e_{ij} = 0, w_{ij} \neq 0$ のとき,

$$dv_i = (\mathbf{W} \times d\mathbf{x})_i \quad (2.43)$$

$\mathbf{W}$: 相対角速度

応力(stress)と運動法則

物体力 (body force) と表面力 (surface force)

body force: 体積に比例して働く力.

e.g.) 重力, クーロン力

surface force: 面積に比例して働く力.

e.g.) 液体内の圧力

traction

traction $\mathbf{T}$: 媒質内部の相互作用により生ずる表面力.

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta S} \quad (2.44)$$

$\mathbf{n}$: 単位法線ベクトル. 外側が正.

traction: $\mathbf{n}$ の関数

応力(stress)

定義

座標軸に垂直な面を持つ微小立法体を考える.

$$T_j(\mathbf{i}_k) = \tau_{jk} \quad (2.45)$$

$T_k(\mathbf{i}_j) = \tau_{jk}$ と定義することもある.

オイラーの運動法則

体積 $V(t)$ を占める物体の運動量 $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \int_{V(t)} \mathbf{v}^E \rho^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.46)$$

角運動量 $\mathbf{h}$

$$\mathbf{h} = \int_{V(t)} \mathbf{r}^E \times \mathbf{v}^E \rho^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.47)$$

$\mathbf{r}$: 任意の固定点からの位置ベクトル.

オイラーの第一運動法則

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{v}^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \quad (2.48)$$

オイラーの第二運動法則

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r}^E \times \mathbf{v}^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \quad (2.49)$$

$\mathbf{f}$: 外部から与えられた力, $\mathbf{l}$: 外部から与えられたトルク.

運動法則から導かれる応力テンソルの性質

媒質内の任意の領域 δV を考える.

$$\mathbf{f} = \int_{\delta S(t)} \mathbf{T}^E(\mathbf{n}) dS + \int_{\delta V(t)} \mathbf{X}^E d\mathbf{x} \quad (2.50)$$

$\mathbf{T}$: 外部から与えられる表面力. $\mathbf{X}$: 外部から与えられる物体力.

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V(t)} \mathbf{v}^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{\delta S(t)} \mathbf{T}^E(\mathbf{n}^E) dS(\mathbf{x}) + \int_{\delta V(t)} \mathbf{X}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

$\delta V \rightarrow 0$ ならば

$$\int_{\delta S} \mathbf{T}^E(\mathbf{n}) dS(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.52)$$

円盤を考えた場合

$$\mathbf{T}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(\mathbf{n}) \quad (2.53)$$

四面体を考えた場合

$$dS_j = n_j^E dS \quad (2.54)$$

$$T_i^E dS - \tau_{ij}^E dS_j = 0 \quad (2.55)$$

したがって

$$T_i = \tau_{ij} n_j \quad (2.56)$$

応力テンソル τ_{ij} を与えることにより, 媒質内部の表面力の状態を一意に表現できる.

媒質内の任意の領域 δV を考える. δV にかかるトルク:

$$\mathbf{l} = \int_{\delta S} \mathbf{r}^E \times \mathbf{T}^E(\mathbf{n}^E) dS(\mathbf{x}) + \int_{\delta V} \mathbf{r}^E \times \mathbf{X}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V} \mathbf{r}^E \times \mathbf{v}^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{\delta S} \mathbf{r}^E \times \mathbf{T}^E(\mathbf{n}^E) dS(\mathbf{x}) + \int_{\delta V} \mathbf{r}^E \times \mathbf{X}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.58)$$

$\delta V \rightarrow 0$ の時,

$$\int_{\delta S} \mathbf{r}^E \times \mathbf{T}^E(\mathbf{n}^E) dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.59)$$

座標軸に平行な平行六面体の重心回りのトルクを考えた場合

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.60)$$

主応力と主歪み

主応力の定義:

$$\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}_i = \sigma_i \mathbf{n}_i, \quad (2.61)$$

or

$$(\boldsymbol{\tau} - \sigma_i \mathbf{I}) \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

を満たす $\mathbf{n}_i$ を応力の主軸, σ_i を主応力と呼ぶ.

主軸 $\mathbf{n}_i$ を基底ベクトルとした座標系に対する応力テンソル τ'_{ij} :

$$\boldsymbol{\tau}' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

応力テンソルの不変量: τ' が τ に回転変換を施して得られる応力テンソルとする. 主応力是不変であるので,

$$|\boldsymbol{\tau} - \sigma \mathbf{I}| = |\boldsymbol{\tau}' - \sigma \mathbf{I}| = 0. \quad (2.64)$$

特性方程式はともに

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\tau} - \sigma \mathbf{I}| &= |\boldsymbol{\tau}' - \sigma \mathbf{I}| \\ &= -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 \\ &= -(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \\ &= -\sigma^3 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \sigma^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \sigma + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる.

応力テンソルの主不変量

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\tau} (= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.66)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \boldsymbol{\tau} - \text{tr} \boldsymbol{\tau}^2) (= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (2.67)$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\tau} (= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \quad (2.68)$$

主歪みの定義:

$$\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n}_i = e_i \mathbf{n}_i, \quad (2.69)$$

or

$$(\boldsymbol{\epsilon} - e_i \mathbf{I}) \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

を満たす $\mathbf{n}_i$ を歪みの主軸, e_i を主歪みと呼ぶ.

主軸 $\mathbf{n}_i$ を基底ベクトルとした座標系に対する歪みテンソル ϵ'_{ij} :

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

歪みテンソルの主不変量

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\epsilon} (= e_1 + e_2 + e_3) \quad (2.72)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \boldsymbol{\epsilon} - \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}^2) (= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) \quad (2.73)$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\epsilon} (= e_1 e_2 e_3) \quad (2.74)$$

等方媒質の場合の主軸:

ラメ定数 λ, μ を用いて

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.75)$$

で与えられる (後述) ので,

$$\tau_{ij} n_j = \sigma n_i \quad (2.76)$$

$$\lambda \epsilon_{kk} n_i + 2\mu \epsilon_{ij} n_j - \sigma n_i = 0 \quad (2.77)$$

$$(\epsilon_{ij} - e' \delta_{ij}) n_j = 0, \quad (2.78)$$

where

$$e' = \frac{\sigma - \lambda \epsilon_{kk}}{2\mu} \quad (2.79)$$

等方媒質では, 応力の主軸と, 歪みの主軸が一致する.

連続体力学の支配方程式 (オイラー表現)

体積積分の時間微分

$$I(t) = \int_{V(t)} \phi^E(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) \quad (2.80)$$

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \phi^E(\mathbf{x}, t + \delta t) dV(\mathbf{x}) - \int_{V(t)} \phi^E(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) \right] \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{V(t)} [\phi^E(\mathbf{x}, t + \delta t) - \phi^E(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\delta V(t)} \phi^E(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \phi^E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV(\mathbf{x}) + \int_{S(t)} \phi^E(\mathbf{x}, t) v_j^E n_j^E dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.82)$$

したがって

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi^E(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \phi^E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi^E v_j^E}{\partial x_j} \right) dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \left(\frac{D\phi^E}{Dt} + \phi^E \frac{\partial v_j^E}{\partial x_j} \right) dV(\mathbf{x}) \quad (2.83)$$

連続の式

密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ により

$$m = \int_{V(t)} \rho^E(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) \quad (2.84)$$

質量保存の式

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho^E(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.85)$$

つまり

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \frac{\partial \rho^E v_j^E}{\partial x_j} = 0 \quad (2.86)$$

$$\frac{D\rho^E}{Dt} + \rho^E \frac{\partial v_j^E}{\partial x_j} = 0 \quad (2.87)$$

Cauchy の第 1 運動法則 (運動量保存則)

領域 $V(t)$ を占める媒質の境界面に働く表面力を $\mathbf{T}^E$, 物体力を $\mathbf{X}^E$ とすると,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} v_i^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{S(t)} T_i^E dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} X_i^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.88)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} v_i^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \tau_{ij}^E}{\partial x_j} + X_i^E \right) dV(\mathbf{x}) \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_{V(t)} \left(\frac{Dv_i^E \rho^E}{Dt} + v_i^E \rho^E \frac{\partial v_j^E}{\partial x_j} \right) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_{V(t)} \left[\rho^E \frac{Dv_i^E}{Dt} + v_i^E \left(\frac{D\rho^E}{Dt} + \rho^E \frac{\partial v_j^E}{\partial x_j} \right) \right] dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_{V(t)} \rho^E \frac{Dv_i^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\left(\text{一般に } \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \rho^E \frac{D\phi^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) \right) \quad (2.91)$$

なので

$$\rho^E \frac{Dv_i^E}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}^E}{\partial x_j} + X_i^E \quad (2.92)$$

Cauchy の第 2 運動法則 (角運動量保存則)

原点まわりのつりあいの式:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} e_{ijk} x_j v_k^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{S(t)} e_{ijk} x_j T_k^E dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} e_{ijk} x_j X_k^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.93)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} e_{ijk} x_j v_k^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial e_{ijk} x_j \tau_{kl}^E}{\partial x_l} + e_{ijk} x_j X_k^E \right] dV(\mathbf{x}) \quad (2.94)$$

$$(\text{左辺}) = \int_{V(t)} e_{ijk} x_j \frac{Dv_k^E}{Dt} \rho^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.95)$$

$$(\text{右辺第 1 項}) = e_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}^E}{\partial x_l} + e_{ijk} \tau_{kj}^E \quad (2.96)$$

なので,

$$e_{ijk} x_j \frac{Dv_k^E}{Dt} \rho^E = e_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}^E}{\partial x_l} + e_{ijk} \tau_{kj}^E + e_{ijk} x_j X_k^E, \quad (2.97)$$

or

$$e_{ijk}x_j \left(\rho^E \frac{Dv_k^E}{Dt} - \frac{\partial \tau_{kl}^E}{\partial x_l} - X_k^E \right) - e_{ijk}\tau_{kj}^E = 0 \quad (2.98)$$

第1項はゼロなので

$$e_{ijk}\tau_{kj}^E = 0 \quad (2.99)$$

つまり

$$\tau_{kj} = \tau_{jk} \quad (2.100)$$

エネルギー保存の式

力学的エネルギーのつりあいの式

新たな条件式とはならない.

運動量の保存の式から導かれた方程式 (運動方程式) からつりあいの式を導出する.

$$\rho^E v_i^E \frac{Dv_i}{Dt} = v_i^E \frac{\partial \tau_{ij}^E}{\partial x_j} + v_i^E X_i^E \quad (2.101)$$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2} \rho^E \frac{Dv_i^E v_i^E}{Dt} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺第一項}) &= v_i^E \frac{\partial \tau_{ij}^E}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i^E \tau_{ij}^E}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i^E}{\partial x_j} \tau_{ij}^E \\ &= \frac{\partial v_i^E \tau_{ij}^E}{\partial x_j} - \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E \end{aligned} \quad (2.103)$$

なぜなら

$$\frac{\partial v_i^E}{\partial x_j} = \bar{L}_{ij} \tau_{ij}^E = (\bar{e}_{ij} - \bar{w}_{ij}) \tau_{ij}^E = \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E \quad (2.104)$$

代入すると,

$$\frac{1}{2} \rho^E \frac{Dv_i^E v_i^E}{Dt} = \frac{\partial v_i^E \tau_{ij}^E}{\partial x_j} + v_i^E X_i^E - \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E \quad (2.105)$$

力学的なエネルギーのつりあいの式:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho v_i^E v_i^E dV(\mathbf{x}) = \int_{S(t)} v_i^E \tau_{ij}^E n_j^E dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} v_i^E X_i^E dV(\mathbf{x}) - \int_{V(t)} \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.106)$$

運動エネルギー K :

$$K = \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho^E v_i^E v_i^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.107)$$

熱的エネルギーのつりあいの式

内部エネルギー

$$E = \int_{V(t)} \epsilon^E \rho^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.108)$$

ϵ : 単位質量あたりの内部エネルギー

$$\frac{d}{dt} (K + E) = \int_{S(t)} (v_i^E \tau_{ij}^E - h_j^E) n_j dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} (v_i^E X_i^E + q^E) dV(\mathbf{x}) \quad (2.109)$$

h : 単位面積あたりの熱流束 (heat flux), q : 単位体積あたりの熱湧き出し (thermal source).

熱的エネルギーのつりあいの式:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon^E \rho^E dV(\mathbf{x}) = - \int_{S(t)} h_i^E n_i^E dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} q^E dV(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.110)$$

$$\int_{V(t)} \rho^E \frac{D\epsilon^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) = - \int_{S(t)} h_i^E n_i^E dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} q^E dV(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.111)$$

あるいは、熱力学の第一法則

$$\rho^E \frac{D\epsilon^E}{Dt} = -\frac{\partial h_i^E}{\partial x_i} + q^E + \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E \quad (2.112)$$

地震学では、熱的過程を考慮せず ($q = 0, h = 0$)

$$\frac{dE}{dt} = \int_{V(t)} \rho^E \frac{D\epsilon^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.113)$$

連続体力学の支配方程式 (ラグランジュ表現)

Reference:

Dahlen and Tromp (1998), “Theoretical Global Seismology”, Chapter 2-3.

変形による体積及び面積の変化

体積変化:

$$dV^t = J dV^0, \quad (2.114)$$

ただし,

$dV^t = dx_1 dx_2 dx_3$ 時刻 t における微小要素の体積

$dV^0 = dX_1 dX_2 dX_3$ 時刻 0 における微小要素の体積

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| = |\mathbf{F}|. \quad (2.115)$$

面積変化:

$$n_i^0 dS^0 = e_{ijk} dX_j \delta X_k, \quad n_{i'}^t dS^t = e_{i'j'k'} dx_{j'} \delta x_{k'} \quad (2.116)$$

$$e_{ijk} dX_i dX_j dX_k = e_{i'j'k'} J^{-1} dx_{i'} dx_{j'} dx_{k'} \quad (2.117)$$

及び

$$e_{ijk} dX_i dX_j dX_k = e_{ijk} F^{-1}_{ii'} F^{-1}_{jj'} F^{-1}_{kk'} dx_{i'} dx_{j'} dx_{k'}, \quad (2.118)$$

から

$$e_{i'j'k'} J^{-1} = e_{ijk} F^{-1}_{ii'} F^{-1}_{jj'} F^{-1}_{kk'}. \quad (2.119)$$

また, さらに

$$n_i^0 dS^0 = e_{ijk} F^{-1}_{jj'} dx_{j'} F^{-1}_{kk'} \delta x_{k'}, \quad (2.120)$$

なので,

$$F^{-1}_{ii'} n_i^0 dS^0 = e_{i'j'k'} J^{-1} dx_{j'} \delta x_{k'} = J^{-1} n_{i'}^t dS^t, \quad (2.121)$$

つまり

$$n_{i'}^t dS^t = J n_i^0 dS^0 F^{-1}_{ii'}. \quad (2.122)$$

or

$$\mathbf{n} dS^t = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n} dS^0 \quad (2.123)$$

様々な応力テンソルの定義

Cauchy Stress

変形後の表面 dS^t に加わる力 $df_i = T_i dS^t$ を用い,

$$df_i = \tau_{ij} n_j dS^t \quad (2.124)$$

と定義される.

(オイラー表現)

$$T_i^E dS^t(\mathbf{x}) = \tau_{ij}^E n_j(\mathbf{x}) dS^t(\mathbf{x}) \quad (2.125)$$

(ラグランジュ表現)

$$T_i^L dS^t(\mathbf{X}) = \tau_{ij}^L n_j(\mathbf{X}) dS^t(\mathbf{X}) \quad (2.126)$$

First Piola-Kirchhoff Stress

変形後の表面 dS^t に加わる力 $df_i = T_i dS^t$ を用い、

$$df_i = \tau^{PK}_{ij} n_j^0 dS^0 \quad (2.127)$$

と定義される.

(ラグランジュ表現)

$$T_i^L dS^t(\mathbf{X}) = \tau^{PK}_{ij} n_j^0(\mathbf{X}) dS^0(\mathbf{X}) \quad (2.128)$$

Cauchy Stress と以下の関係がある.

$$\tau^{PK}_{ij} = J \tau_{ik}^L F^{-1}_{jk} \quad (\tau^{PK} = J \tau^L \mathbf{F}^{-T}) \quad (2.129)$$

$$\tau_{ij}^L = J^{-1} \tau^{PK}_{ik} F_{jk} \quad (\tau^L = J^{-1} \tau^{PK} \mathbf{F}^T) \quad (2.130)$$

Second Piola-Kirchhoff Stress

$$d\mathbf{f}' = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} \quad (\text{c.f., } d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}) \quad (2.131)$$

で定義される力 df'_i を用い、

$$df'_i = \tau^{SK}_{ij} n_j^0 dS_0 \quad (2.132)$$

と定義される.

first Piola-Kirchhoff stress と以下の関係がある.

$$\tau^{SK}_{ij} = F^{-1}_{ik} \tau^{PK}_{kj} \quad (\tau^{SK} = \mathbf{F}^{-1} \tau^{PK}) \quad (2.133)$$

$$\tau^{PK}_{ij} = F_{ik} \tau^{SK}_{kj} \quad (\tau^{PK} = \mathbf{F} \tau^{SK}) \quad (2.134)$$

Cauchy stress と以下の関係がある.

$$\tau^{SK}_{ij} = J F^{-1}_{ik} \tau_{kl}^L F^{-1}_{jl} \quad (\tau^{SK} = J \mathbf{F}^{-1} \tau^L \mathbf{F}^{-T}) \quad (2.135)$$

$$\tau_{ij}^L = J^{-1} F_{ik} \tau^{SK}_{kl} F_{jl} \quad (\tau^L = J \mathbf{F} \tau^{SK} \mathbf{F}^T) \quad (2.136)$$

連続の式

$$\int_{V(t)} \rho^E dV(\mathbf{x}) = \int_{V^0} \rho^L J dV(\mathbf{X}) \quad \left(J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| = |\mathbf{F}| \right) \quad (2.137)$$

及び

$$\int_{V^0} \rho^L J dV(\mathbf{X}) = \int_{V^0} \rho^0 dV(\mathbf{X}), \quad (2.138)$$

$$(\text{ただし, } \rho^0 = \rho^L(\mathbf{X}, t=0), \quad V^0 = V(t=0).) \quad (2.139)$$

が成り立つので,

$$\rho^L J = \rho^0. \quad (2.140)$$

$$(\text{このため, 一般に, } \int_{V(t)} \rho^E \phi^E dV(\mathbf{x}) = \int_{V^0} \rho^0 \phi^L dV(\mathbf{X}) \text{ が成り立つ}) \quad (2.141)$$

運動量の保存

$$\int_{V(t)} \rho^E \frac{Dv_i^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) = \int_{S(t)} \tau_{ij}^E n_j^E dS(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} X_i^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.142)$$

$$(\text{左辺}) = \int_{V^0} \rho^L \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial t^2} J dV(\mathbf{X}) = \int_{V^0} \rho^0 \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial t^2} dV(\mathbf{X}) \quad (2.143)$$

$$(\text{右辺第一項}) = \int_{S^0} (\tau^L J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}^0)_i dS(\mathbf{X}) = \int_{S^0} \tau_{ij}^{PK} n_j^L dS(\mathbf{X}) = \int_{V^0} (\tau_{ij}^{PK})_{,j} dV(\mathbf{X}) \quad (2.144)$$

$$(\text{右辺第二項}) = \int_{V^0} F_i^L dV(\mathbf{X}) \text{ と定義する.} \quad (2.145)$$

従って,

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial t^2} = (\tau_{ij}^{PK})_{,j} + F_i^L \quad (2.146)$$

or

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial t^2} = (F_{ik} \tau_{kj}^{SK})_{,j} + F_i^L \quad (2.147)$$

角運動量の保存

$$\tau_{ji}^L = \tau_{ij}^L \quad \left(\tau^{LT} = \tau^L \right) \quad (2.148)$$

Cauchy stress と first Piola-Kirchhoff stress の関係を用いると,

$$\left(J^{-1} \tau^{PK} \mathbf{F}^T \right)^T = J^{-1} \tau^{PK} \mathbf{F}^T \quad (2.149)$$

つまり

$$\left(\tau^{PK} \right)^T = \mathbf{F}^{-1} \tau^{PK} \mathbf{F}^T. \quad (2.150)$$

あるいは,

$$\left(\tau^{SK} \right)^T = \tau^{SK} \quad (2.151)$$

エネルギー保存

$$\int_{V(t)} \rho^E \frac{D\epsilon^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \bar{e}_{ij} \tau_{ij}^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.152)$$

2つの関係式（あとで証明する）

$$\bar{L}_{ij}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = L_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial F_{ik}(\mathbf{X})}{\partial t} F_{kj}^{-1}(\mathbf{X}) \quad \left(\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (2.153)$$

$$\bar{e}_{ij}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = e_{ij}(\mathbf{X}) = F^{-1}_{ki} \frac{\partial E_{kl}(\mathbf{X})}{\partial t} F^{-1}_{lj}(\mathbf{X}) \quad \left(\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (2.154)$$

を用い, 上式を τ^{PK} あるいは τ^{SK} を用いて評価する.

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ij}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \tau_{ij}^E(\mathbf{x}(\mathbf{X})) &= \bar{L}_{ij}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \tau_{ij}^E(\mathbf{x}(\mathbf{X})) = L_{ij}(\mathbf{X}) \tau_{ij}^L(\mathbf{X}) \\ &= \frac{\partial F_{ik}}{\partial t} F_{kj}^{-1} J^{-1} \tau_{il}^{PK} F_{jl} = J^{-1} \frac{\partial F_{ik}}{\partial t} \tau_{il}^{PK} \delta_{kl} \\ &= J^{-1} \frac{\partial F_{ik}}{\partial t} \tau_{ik}^{PK} \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ij}(\mathbf{x}(\mathbf{X})) \tau_{ij}^E(\mathbf{x}(\mathbf{X})) &= e_{ij}(\mathbf{X}) \tau_{ij}^L(\mathbf{X}) = F^{-1}_{ki} \frac{\partial E_{kl}}{\partial t} F^{-1}_{lj}(\mathbf{X}) J^{-1} F_{im} \tau_{mn}^{SK} F_{jn} \\ &= J^{-1} \frac{\partial E_{kl}}{\partial t} \tau_{mn}^{SK} \delta_{km} \delta_{ln} = J^{-1} \frac{\partial E_{kl}}{\partial t} \tau_{kl}^{SK} \end{aligned} \quad (2.156)$$

なので,

$$\int_{V_0} \rho^0 \frac{\partial \epsilon^L}{\partial t} dV(\mathbf{X}) = \int_{V_0} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} \tau_{ij}^{PK} dV(\mathbf{X}) \quad (2.157)$$

あるいは

$$\int_{V_0} \rho^0 \frac{\partial \epsilon^L}{\partial t} dV(\mathbf{X}) = \int_{V_0} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} \tau_{ij}^{SK} dV(\mathbf{X}) \quad (2.158)$$

線形摂動近似のもとでの支配方程式

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.159)$$

$|\mathbf{u}|$ は微小であると仮定し, $|\mathbf{u}|^2$ 以上の項を無視する.

摂動量のオイラー表現及びラグランジュ表現

任意の物理量 ϕ に対し, 摂動量 ϕ^{E1}, ϕ^{L1} を

$$\phi^E(\mathbf{x}, t) = \phi^0(\mathbf{x}) + \phi^{E1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.160)$$

$$\phi^L(\mathbf{X}, t) = \phi^0(\mathbf{X}) + \phi^{L1}(\mathbf{X}, t) \quad (2.161)$$

(ϕ^0 :初期値) と定義する.

$$\phi^{E1}(\mathbf{x}, t) = \phi^{E1}(\mathbf{X}, t), \quad \phi^{L1}(\mathbf{X}, t) = \phi^{L1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.162)$$

なぜなら

$$\phi^{E1}(\mathbf{x}, t) = \phi^{E1}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \phi^{E1}}{\partial x_i} u_i \approx \phi^{E1}(\mathbf{X}, t) \quad (2.163)$$

以後はラグランジュ表現, オイラー表現ともに, 摂動量の空間依存性は $\mathbf{X}$ を用いて表現されていると仮定する.

$$\phi^E(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \phi^L(\mathbf{X}, t) \quad (2.164)$$

なので

$$\phi^0(\mathbf{x}) + \phi^{E1}(\mathbf{X}, t) = \phi^0(\mathbf{X}) + \phi^{L1}(\mathbf{X}, t) \quad (2.165)$$

$$\frac{\partial \phi^0(\mathbf{X})}{\partial X_i} u_i(\mathbf{X}, t) + \phi^{E1} = \phi^{L1}, \quad (2.166)$$

つまり

$$\phi^{L1} = \phi^{E1} + u_i \phi_{,i}^0 \quad (2.167)$$

変形の表現

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.168)$$

線形摂動近似のもとでは,

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j} \quad (2.169)$$

あるいは

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij} - \theta_{ij}, \quad (2.170)$$

where

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.171)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} - u_{i,j}) \quad (2.172)$$

ラグランジュ歪み

$$|d\mathbf{x}|^2(\mathbf{X}, t) - |d\mathbf{X}|^2 = 2E_{ij}dX_idX_j \quad (2.173)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (2.174)$$

線形摂動近似のもとでは,

$$E_{ij} = \epsilon_{ij} \quad (2.175)$$

体積及び面積の摂動

体積の変化:

$$dV^t = JdV^0, \quad J = |\mathbf{F}| \quad (2.176)$$

線形摂動近似のもとでは,

$$J = 1 + \text{tr } \epsilon = 1 + u_{k,k} \quad (2.177)$$

面積の変化:

$$n_j^t dS^t = J n_i^0 dS^0 F_{ij}^{-1} \quad (2.178)$$

線形近似のもとでは,

$$(F^{-1})_{ij} = \delta_{ij} - u_{i,j} \quad (2.179)$$

なので,

$$n_j^t dS^t = (1 + u_{k,k}) n_i^0 dS^0 (\delta_{ij} - u_{i,j}) = (1 + u_{k,k}) n_i^0 dS^0 - u_{i,j} n_i^0 dS^0 \quad (2.180)$$

応力の摂動

Cauchy stress の摂動:

$$\tau_{ij}^E = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^{E1} \quad (2.181)$$

$$\tau_{ij}^L = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^{L1} \quad (2.182)$$

と定義され,

$$\tau_{ij}^{L1} = \tau_{ij}^{E1} + u_k \tau_{ij,k}^0 \quad (2.183)$$

の関係がある.

Piola-Kirchhoff stress の摂動:

$$\tau_{ij}^{PK} = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^{PK1} \quad (2.184)$$

$$\tau_{ij}^{SK} = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^{SK1} \quad (2.185)$$

と定義され,

$$\tau_{ij}^{PK} = J \tau_{ik}^L F_{jk}^{-1} = (1 + u_{l,l})(\tau_{ik}^0 + \tau_{ik}^{L1})(\delta_{jk} - u_{j,k}) \quad (2.186)$$

なので,

$$\tau_{ij}^{PK1} = \tau_{ij}^{L1} + u_{k,k} \tau_{ij}^0 - \tau_{ik}^0 u_{j,k} \quad (2.187)$$

$$\tau_{ij}^{SK} = J F_{ik}^{-1} \tau_{kl}^{L1} F_{jl}^{-1} = (1 + u_{m,m})(\delta_{ik} - u_{i,k})(\tau_{kl}^0 + \tau_{kl}^{L1})(\delta_{jl} - u_{j,l}) \quad (2.188)$$

なので,

$$\tau_{ij}^{SK1} = \tau_{ij}^{L1} + u_{k,k} \tau_{ij}^0 - \tau_{ik}^0 u_{j,k} - \tau_{kj}^0 u_{i,k} \quad (2.189)$$

さらに

$$\tau_{ij}^{PK1} = \tau_{ij}^{SK1} + \tau_{kj}^0 u_{i,k} \quad (2.190)$$

$\tau_{ij}^{E1}, \tau_{ij}^{L1}, \tau_{ij}^{SK1}$ は対称. τ_{ij}^{PK1} はそうでない. 実際,

$$\tau_{ji}^{PK1} = \tau_{ij}^{PK1} + \tau_{ik}^0 u_{j,k} - \tau_{jk}^0 u_{i,k} \quad (2.191)$$

$\tau_{ij}^0 = 0$ の時,

$$\tau_{ij}^{E1} = \tau_{ij}^{L1} = \tau_{ij}^{PK1} = \tau_{ij}^{SK1} \quad (2.192)$$

摂動近似のもとでの保存則

摂動近似のもとでの質量保存

密度の摂動:

$$\rho^E = \rho^0 + \rho^{E1} \quad (2.193)$$

を

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \frac{\partial \rho^E v_k^E}{\partial x_k} = 0 \quad (2.194)$$

に代入すると,

$$\frac{\partial \rho^{E1}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho^0(\mathbf{x}) v_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} = 0 \quad (2.195)$$

$$\frac{\partial \rho^{E1}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial \{(\rho^0(\mathbf{X}) + \rho_{,j}^0 u_j) v_k(\mathbf{X}, t)\}}{\partial X_i} = 0 \quad (2.196)$$

$$\frac{\partial \rho^{E1}}{\partial t} + (\rho^0 v_k)_{,k} = 0 \quad (2.197)$$

つまり,

$$\rho^{E1} = -(\rho^0 u_k)_{,k} \quad (2.198)$$

密度の摂動:

$$\rho^L = \rho^0 + \rho^{L1} \quad (2.199)$$

を, 連続の式

$$\rho^L J = \rho^0 \quad (2.200)$$

に代入すると,

$$(\rho^0 + \rho^{L1})(1 + u_{k,k}) = \rho^0 \quad (2.201)$$

つまり,

$$\rho^{L1} = -\rho^0 u_{k,k} \quad (2.202)$$

実際に,

$$\rho^{L1} = \rho^{E1} + u_k \rho_{,k}^0 \quad (2.203)$$

運動量の保存

オイラー表現を用いた運動量保存則の式

$$\int_{V(t)} \rho^E \frac{Dv_i^E}{Dt} dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \frac{\partial \tau_{ij}^E}{\partial x_j} dV(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} X_i^E dV(\mathbf{x}) \quad (2.204)$$

損動量の定義

$$\tau_{ij}^E = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^{E1} \quad (2.205)$$

$$X_i^E = X_i^{E1} \quad (2.206)$$

$$u_i^E = u_i \quad (2.207)$$

初期状態の定義

$$0 = \frac{\partial \tau_{ij}^0}{\partial x_j} \quad (2.208)$$

により,

$$\int_{V(t)} \rho^E \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV(\mathbf{x}) = \int_{V(t)} \frac{\partial \tau_{ij}^{E1}}{\partial x_j} dV(\mathbf{x}) + \int_{V(t)} X_i^{E1} dV(\mathbf{x}) \quad (2.209)$$

置換積分をすると,

$$\int_{V^0} \rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV(\mathbf{X}) = \int_{V^0} \frac{\partial (\tau_{ij}^{L1} - \tau_{ij,k}^0 u_k)}{\partial X_l} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} J dV(\mathbf{X}) + \int_{V^0} F_i^{L1} dV(\mathbf{X}) \quad (2.210)$$

$$\int_{V^0} \rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV(\mathbf{X}) = \int_{V^0} \frac{\partial (\tau_{ij}^{L1} - \tau_{ij,k}^0 u_k)}{\partial X_l} (\delta_{jl} - u_{l,j}) (1 + u_{k,k}) dV(\mathbf{X}) + \int_{V^0} F_i^{L1} dV(\mathbf{X}) \quad (2.211)$$

$$\int_{V^0} \rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV(\mathbf{X}) = \int_{V^0} (\tau_{ij}^{L1} - \tau_{ij,k}^0 u_k)_{,j} dV(\mathbf{X}) + \int_{V^0} F_i^{L1} dV(\mathbf{X}) \quad (2.212)$$

つまり

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j}^{L1} - (\tau_{ij,k}^0 u_k)_{,j} + F_i^{L1} \quad (2.213)$$

ラグランジュ表現を用いた運動量保存則の式

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial t^2} = \tau_{ij,j}^{PK} + F_i^L \quad (2.214)$$

損動量の定義

$$\tau_{ij}^{PK} = \tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^{PK1} \quad (2.215)$$

$$F_i^L = F_i^{L1} \quad (2.216)$$

$$u_i^L = u_i \quad (2.217)$$

初期状態の定義

$$0 = \tau_{ij,j}^0 \quad (2.218)$$

により,

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j}^{PK1} + F_i^{L1} \quad (2.219)$$

実際に,

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^{PK1} &= \tau_{ij}^{L1} + u_{k,k}\tau_{ij}^0 - \tau_{ik}^0 u_{j,k} \\ &= \tau_{ij}^{L1} + (u_k \tau_{ij}^0)_{,k} - \tau_{ij,k}^0 u_k - (u_j \tau_{ik}^0)_{,k} + \tau_{ik,k}^0 u_j \\ &= \tau_{ij}^{L1} + (u_k \tau_{ij}^0 - u_j \tau_{ik}^0)_{,k} - \tau_{ij,k}^0 u_k\end{aligned}\quad (2.220)$$

なので,

$$\tau_{ij,j}^{PK1} = \tau_{ij,j}^{L1} - (\tau_{ij,k}^0 u_k)_{,j} \quad (2.221)$$

が確認できる.

角運動量の保存

$$\tau_{ji}^{SK1} = \tau_{ij}^{SK1} \quad (2.222)$$

構成方程式

完全流体

定義: 応力テンソル σ_{ij} が

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.223)$$

と表せる量.

理想気体なら

$$p = \rho RT \quad (2.224)$$

非圧縮流体なら

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.225)$$

が状態方程式.

線形粘性流体

ニュートン流体: せん断応力が歪み速度に比例する流体

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl}e_{kl} \quad (2.226)$$

e_{ij} : 歪み速度テンソル, D_{ijkl} : 粘性を表すテンソル.

等方媒質の場合

$$D_{ijkl} = \zeta\delta_{ij}\delta_{kl} + \eta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.227)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \zeta e_{kk}\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (2.228)$$

$$\frac{1}{3}\sigma_{kk} = -p + \left(\zeta + \frac{2}{3}\eta\right)e_{kk} \quad (2.229)$$

平均垂直応力が体積歪み速度に無関係であると仮定する (ストークス流体)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (2.230)$$

非圧縮流体なら

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (2.231)$$

線形弾性体

フックの法則

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.232)$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{ijlk}, C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.233)$$

独立な成分:21 個
等方媒質

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.234)$$

あるいは

$$\sigma_{kk} = 3\kappa\epsilon_{kk} \left(\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \quad (2.235)$$

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} \quad (2.236)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.237)$$

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.238)$$

線形粘弾性体

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.239)$$

G_{ijkl} : 緩和テンソル
周波数領域で書くと,

$$\sigma_{ij}(\omega) = (i\omega G_{ijkl}(\omega)) \epsilon_{kl}(\omega) \quad (2.240)$$

等方媒質の場合

$$\sigma_{kk}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.241)$$

$$\sigma'_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t G'(t-\tau) \frac{\partial \epsilon'_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.242)$$

$G(t)$, $G'(t)$: 等方圧縮及びせん断に対する緩和関数

$$\epsilon_{kk}(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.243)$$

$$\epsilon'_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J'(t-\tau) \frac{\partial \sigma'_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.244)$$

$J(t)$, $J'(t)$: 等方圧縮及びせん断に対するクリープ関数

弾性定数テンソルの対称性

フックの法則

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.245)$$

$$C_{jikl} = C_{ijkl} \quad (\tau_{ji} = \tau_{ij}) \quad (2.246)$$

$$C_{ijlk} = C_{ijkl} \quad (\epsilon_{lk} = \epsilon_{kl}) \quad (2.247)$$

$$C_{klij} = C_{ijkl} \text{ を普通仮定する.} \quad (2.248)$$

$C_{klij} = C_{ijkl}$ を仮定=歪みエネルギー密度関数が ϵ_{ij} のみに依存する:
エネルギー保存の式 (熱力学の第一法則, オイラー表現)

$$\rho^E \frac{D\epsilon^E}{Dt} = -\frac{\partial h_i^E}{\partial x_i} + q^E + \bar{e}_{ij}\tau_{ij}^E \quad (2.249)$$

地震学では、熱的過程を考慮せず ($q = 0, h_{i,i} = 0$)

$$\rho^E \frac{D\epsilon^E}{Dt} = \bar{\epsilon}_{ij} \tau_{ij}^E (= \frac{\partial W^E}{\partial t} \text{とおく.}) \quad (2.250)$$

ラグランジュ表現にすると (証明省略)

$$\frac{\partial W^L}{\partial t} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} \tau_{ij}^{SK} \quad (2.251)$$

線形摂動近似, $\tau_{ij}^0 = 0$ のもとでは

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \tau_{ij}. \quad (2.252)$$

一方で、歪みエネルギー密度関数が ϵ_{ij} の関数であるなら、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.253)$$

つまり、

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (W : \text{strain energy function}) \quad (2.254)$$

と書けるとすると、

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = C_{ijkl} \quad (2.255)$$

$$\frac{\partial \tau_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = C_{klij} \quad (2.256)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \quad (2.257)$$

なので

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.258)$$

フックの法則の別の表記

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.259)$$

ただし

$$C_{mn} = C_{ijkl}, \quad (2.260)$$

where

m,n	i	j
1	x	x
2	y	y
3	z	z
4	y	z
5	z	x
6	x	y

(2.261)

独立な弾性定数は 21 個.

$$C_{mn} = C_{nm} \quad (2.262)$$

単斜晶形

(monoclinic)

座標変換

$$x' = x, y' = y, z' = -z \quad (2.263)$$

に対し、フックの法則が不変. (媒質が x - y 平面に対し面対称)

$$\begin{pmatrix} \tau_{x'x'} \\ \tau_{y'y'} \\ \tau_{z'z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{x'x'} \\ \epsilon_{y'y'} \\ \epsilon_{z'z'} \\ 2\epsilon_{y'z'} \\ 2\epsilon_{x'z'} \\ 2\epsilon_{x'y'} \end{pmatrix} \quad (2.264)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{x'x'} \\ \tau_{y'y'} \\ \tau_{z'z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ -\tau_{yz} \\ -\tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \epsilon_{x'x'} \\ \epsilon_{y'y'} \\ \epsilon_{z'z'} \\ 2\epsilon_{y'z'} \\ 2\epsilon_{x'z'} \\ 2\epsilon_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ -2\epsilon_{yz} \\ -2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.265)$$

なので,

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & -C_{14} & -C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & -C_{24} & -C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & -C_{34} & -C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & -C_{46} \\ & & & & C_{55} & -C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.266)$$

これがもとに C_{mn} 等しくなくてはならないので,

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.267)$$

独立な弾性定数 13 個.

斜方晶形

(orthorhombic)

座標変換

$$x' = -x, y' = y, z' = z \quad (2.268)$$

$$x' = x, y' = -y, z' = z \quad (2.269)$$

$$x' = x, y' = y, z' = -z \quad (2.270)$$

に対し、フックの法則が不変.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.271)$$

独立な弾性定数 9 個.

六方晶形

(hexagonal)

面対称+ z 軸回りの回転に対し、フックの法則が不変. (媒質が z 軸に関して軸対称).

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & (C_{11} - C_{12})/2 \end{pmatrix} \quad (2.272)$$

独立な弾性定数 5 個.

$$2C_{66} = C_{11} - C_{12} \quad (2.273)$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.274)$$

$$\sigma' = Q\sigma Q^T \quad (2.275)$$

$$\sigma_{x'y'} = -\sin \theta \cos \theta \sigma_{xx} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{xy} + \sin \theta \cos \theta \sigma_{yy} \quad (2.276)$$

$$\epsilon'_{x'y'} = -\sin \theta \cos \theta \epsilon_{xx} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \epsilon_{xy} + \sin \theta \cos \theta \epsilon_{yy} \quad (2.277)$$

$$\sigma_{x'y'} = C_{66} 2\epsilon_{x'y'} \quad (2.278)$$

$$\sigma_{xx} = C_{11}\epsilon_{xx} + C_{12}\epsilon_{yy} + C_{13}\epsilon_{zz} \quad (2.279)$$

$$\sigma_{yy} = C_{12}\epsilon_{xx} + C_{11}\epsilon_{yy} + C_{13}\epsilon_{zz} \quad (2.280)$$

$$\sigma_{xy} = 2C_{66}\epsilon_{xy} \quad (2.281)$$

代入して, ϵ_{ij} の係数がゼロとなる条件を導くと,

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2 \quad (2.282)$$

等方媒質

(isotropic)

面対称+ x, y, z 軸回りの回転に対し、フックの法則が不変.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ & & & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ & & & & & (C_{11} - C_{12})/2 \end{pmatrix} \quad (2.283)$$

独立な弾性定数 2 個.

通常は,

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \quad (2.284)$$

$$C_{12} = \lambda \quad (2.285)$$

と置き

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.286)$$

等方媒質に対する C_{ijkl} :

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (2.287)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.288)$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.289)$$

$$\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i, j = 1, 2, 3, \quad \delta_{kl} = 1 \Leftrightarrow k, l = 1, 2, 3, \quad (2.290)$$

$$\delta_{ik}\delta_{jl} = 1 \Leftrightarrow (i, j) = (k, l) \Leftrightarrow i = k, j = l, \quad \delta_{il}\delta_{jk} = 1 \Leftrightarrow (i, j) = (l, k) \Leftrightarrow i = l, j = k \quad (2.291)$$

$$\tau_{xx} = \lambda\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{xx} \quad (2.292)$$

$$\tau_{yy} = \lambda\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{yy} \quad (2.293)$$

$$\tau_{zz} = \lambda\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{zz} \quad (2.294)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \quad (2.295)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu\epsilon_{zx} \quad (2.296)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad (2.297)$$

つまり

$$\tau_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (2.298)$$

Chapter 3

線形弾性体の運動方程式とその解

線形弾性体の運動方程式

等方媒質に対する運動方程式:

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j} + f_i \quad (3.1)$$

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.3)$$

(3) を (2) に代入して

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.4)$$

これを (1) に代入すると

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}))_{,j} + f_i \quad (3.5)$$

均質等方媒質に対する運動方程式

$$\rho^0(\mathbf{X}) = \text{const.} \quad C_{ijkl}(\mathbf{X}) = \text{const.} \quad (3.6)$$

均質であることに留意すると,

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + f_i \quad (3.7)$$

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} + f_i \quad (3.8)$$

従って,

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + f_i \quad (3.9)$$

ベクトル形式で書くと

$$\rho^0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.10)$$

ベクトル公式

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u}) \quad (3.11)$$

を用いると,

$$\rho^0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) - \mu \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (\text{ナビエの方程式}) \quad (3.12)$$

任意不均質異方性媒質に対する方程式:

線形摂動近似, $\tau_{ij}^0 = 0$ に対する基礎方程式群:

$$\rho^{L1} = -\rho^0 u_{k,k} \quad (3.13)$$

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j} + f_i \quad (3.14)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.15)$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (3.16)$$

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.17)$$

(6) を (4) に代入, これから ϵ_{ij} を消去すると,

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) \\ &= \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) u_{k,l} \\ &= C_{ijkl} u_{k,l} \end{aligned} \quad (3.18)$$

これを式 (2) に代入すると,

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i \quad (3.19)$$

式 (3) は式 (4) 及び式 (5) の $C_{ijkl} = C_{jikl}$ から自明.

式 (1) は ρ^{L1} を与える式だが, 興味のない物理量なので無視.

地震学の基礎方程式

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i \quad (3.20)$$

$$(C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}) \quad (3.21)$$

(ラグランジュ表現・オイラー表現の区別一切なし)

理論波形計算:

未知変数: $u_i(\mathbf{X}, t)$: (変位場)

既知変数: $\rho^0(\mathbf{X})$, $C_{ijkl}(\mathbf{X})$: (構造), $f_i(\mathbf{X}, t)$: (震源)

未知数:3 つ, 式の数:3 つ

ナビエの方程式の解

外力がない場合 ($\mathbf{f} = 0$) の非自明解

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \boldsymbol{\psi} \quad (\text{div } \boldsymbol{\psi} = 0) \quad (3.22)$$

と置いて, ナビエの式に代入.

$$\rho^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad } \phi) + \rho^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \boldsymbol{\psi}) = (\lambda + 2\mu) \text{grad } (\text{div } (\text{grad } \phi)) - \mu \text{rot } (\text{rot } (\text{rot } \boldsymbol{\psi})) \quad (3.23)$$

$$\rho^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{grad } \phi) + \rho^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \boldsymbol{\psi}) = (\lambda + 2\mu) \text{grad } (\nabla^2 \phi) + \mu \text{rot } (\nabla^2 \boldsymbol{\psi}) \quad (3.24)$$

$$\rho^0 \text{grad} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^0} \nabla^2 \phi \right) + \rho^0 \text{rot} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho^0} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

従って

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \phi \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \quad (3.27)$$

where

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho^0}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho^0}. \quad (3.28)$$

波動方程式, $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho^0}}$:P 波速度, $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho^0}}$:S 波速度.

$$\mathbf{u}_P = \text{grad } \phi, \quad \mathbf{u}_S = \text{rot } \boldsymbol{\psi} \quad (3.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_P \neq 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_P = 0 \quad (3.30)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_S \neq 0 \quad (3.31)$$

+x 方向に進む, 各振動数 ω の平面波を考える.

$$\phi(x, y, z, t) = A \exp(i\omega(t - x/\alpha)) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}_p = \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} -i\omega/\alpha A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i\omega(t - x/\alpha)) \quad (3.33)$$

P 波: 進行方向にのみに振幅を持つ.

$$\psi(x, y, z, t) = \mathbf{A} \exp(i\omega(t - x/\beta)) \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}_s = \operatorname{rot} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ i\omega/\beta A_z \\ -i\omega/\beta A_y \end{pmatrix} \exp(i\omega(t - x/\alpha)) \quad (3.35)$$

S 波: 進行方向に鉛直な成分のみに振幅を持つ.

外力がある場合 ($\mathbf{f} \neq 0$) の解

$$\mathbf{f}/\rho^0 = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \Psi \quad (\operatorname{div} \Psi = 0) \quad (3.36)$$

と書けるとすると, ナビエの式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha^2 \nabla^2 \phi = \Phi \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \beta^2 \nabla^2 \psi = \Psi \quad (3.38)$$

原点を中心とした半径 a の微小球に $\mathbf{F}(t) = F(t)\mathbf{l}$ の外力が作用した時の波動場を求める. これに対応する体積力は,

$$\mathbf{f}(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{F}(t) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.39)$$

($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) と書ける. なぜなら半径 a の球における体積積分を考えた場合, 原点においては,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int \mathbf{f}(x, y, z, t) dV &= -\lim_{a \rightarrow 0} \int \frac{1}{4\pi} \mathbf{F}(t) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{F}(t) \lim_{a \rightarrow 0} \int \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

であり, 原点以外の点においては, $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ ゆえ $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ になる.

一方で,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}}{\rho^0} &= -\frac{1}{4\pi\rho^0} F(t) \mathbf{l} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{F(t)}{4\pi\rho^0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{F(t)}{4\pi\rho^0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

ゆえ,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= -\frac{F(t)}{4\pi\rho^0} \operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \Psi(x, y, z, t) &= \frac{F(t)}{4\pi\rho^0} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる.

この解は以下で与えられる.

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \int \frac{\Phi(x', y', z', t - R/\alpha)}{R} dx' dy' dz' \quad (3.43)$$

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\beta^2} \int \frac{\Psi(x', y', z', t - R/\alpha)}{R} dx' dy' dz', \quad (3.44)$$

where

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi\alpha^2} \int \frac{\Phi(x', y', z', t - R/\alpha)}{R} dx' dy' dz' \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha^2} \frac{1}{4\pi\rho^0} \int \frac{F(t - \frac{R}{\alpha})}{R} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{1}}{r'} \right) dR dS \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha^2} \frac{1}{4\pi\rho^0} \int F \left(t - \frac{R}{\alpha} \right) \frac{dR}{R} \int \left\{ l_x \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{r'} \right) + l_y \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{r'} \right) + l_z \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{r'} \right) \right\} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha^2} \frac{1}{4\pi\rho^0} \int F \left(t - \frac{R}{\alpha} \right) \frac{dR}{R} \int 4\pi R^2 \left\{ l_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + l_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + l_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi\rho^0\alpha^2} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{1}}{r} \right) \int_0^r R F \left(t - \frac{R}{\alpha} \right) dR \\ &= -\frac{1}{4\pi\rho^0} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{1}}{r} \right) \int_0^{r/\alpha} \tau F(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.46)$$

同様に

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\rho^0} \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{1}}{r} \right) \int_0^{r/\beta} \tau F(t - \tau) d\tau \quad (3.47)$$

これから

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho^0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{1}}{r} \right) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F(t - \tau) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\rho^0\alpha^2} \mathbf{r} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{1}}{r} \right) F \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\rho^0\beta^2} \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{1}}{r} \right) F \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$l_i = \delta_{ip}$ のとき,

$$\begin{aligned} u_i^p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho^0} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_i \partial x_p} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\alpha^2 r} \frac{x_i x_p}{r^2} F \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\beta^2 r} \left(\delta_{ip} - \frac{x_i x_p}{r^2} \right) F \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\rho^0 r^3} (3\gamma_i \gamma_p - \delta_{ip}) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\alpha^2 r} \gamma_i \gamma_p F \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\beta^2 r} (\delta_{ip} - \gamma_i \gamma_p) F \left(t - \frac{r}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

where $\gamma_i = x_i/r$. $r \rightarrow \infty$ において

$$u_i^p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2 r} \gamma_i \gamma_p F \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{1}{4\pi\beta^2 r} (\delta_{ip} - \gamma_i \gamma_p) F \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \quad (3.50)$$

Green 関数

時刻 τ に 1 点場所 $\boldsymbol{\xi}$ に作用する p 方向に単位の大きさの力, $f_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau)$, により生ずる, 場所 $\mathbf{x}$, 時刻 t の変位を $G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ と書き, G_{ip} を Green 関数と呼ぶ.

$$\rho^0(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t^2} = \{C_{ijkl}(\mathbf{x}) G_{kp,l}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, t)\}_{,j} + \delta_{ip} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \quad (3.51)$$

性質 1: 重ね合わせの原理

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_V G_{ip}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) f_p(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} \quad (3.52)$$

性質 2: 時間の原点は任意

$$G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G_{ip}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) = G_{ip}(\mathbf{x}, -\tau; \boldsymbol{\xi}, -t) \quad (3.53)$$

(性質 2': 均質媒質の場合は空間の原点は任意)

$$G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G_{ip}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{0}, \tau) = G_{ip}(-\boldsymbol{\xi}, t; -\mathbf{x}, \tau) \quad (3.54)$$

性質 3: 相反定理

$$G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, 0) = G_{pi}(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{x}, 0) \quad (3.55)$$

$$G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, 0) = G_{pi}(\boldsymbol{\xi}, 0; \mathbf{x}, -t) \quad (3.56)$$

Chapter 4

震源表現

等価物体力

< 線形弾性論 >

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j} + f_i \quad (4.1)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4.2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.3)$$

u_i : 変位,
 τ_{ij} : 応力,
 C_{ijkl} : 弾性定数 $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$,
 ϵ_{ij} : 歪み,
 f_i : 外力

< 実際の運動方程式 >

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} \quad (4.4)$$

σ_{ij} : 実際の応力,
これを变形すると,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \tau_{ij,j} + e_i \quad (4.5)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (4.6)$$

$$e_i = -(\tau_{ij} - \sigma_{ij})_{,j} : \text{等価物体力} \quad (4.7)$$

$$\tau_{ij} - \sigma_{ij} = m_{ij} : \text{モーメント・テンソル密度 (moment tensor density)} \quad (4.8)$$

モーメント・テンソルと力の密度

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^t d\tau \int_V G_{ip}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) e_p(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}) \\ &= - \int_{-\infty}^t d\tau \int_V G_{ip}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) m_{pq,q}(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \int_{-\infty}^t d\tau \int_V G_{ip,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) m_{pq}(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

($m_{pq} = 0$ on S を仮定).

$m_{pq} \neq 0$ の領域=震源域 V_s V_s が $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ の近傍に局在している (点震源である時) 時,

$$M_{pq}(t) = \int_{V_s} m_{pq}(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} : \text{モーメントテンソル} \quad (4.10)$$

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t G_{ip,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}_s, 0) M_{pq}(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

$$G_{ip,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}_s, 0) = G_{ip,q}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, \tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [G_{ip}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s + h\mathbf{i}_q, \tau) - G_{ip}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s - h\mathbf{i}_q, \tau)] \quad (4.12)$$

震源における等価物体力の合力: ゼロ. モーメントテンソル M_{pq} は対称: 合トルクはゼロ.

断層すべりとモーメント・テンソル

相反定理

$$\rho^0 \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} = (C_{ijkl} u_{k,l}(t))_{,j} + f_i(t) \quad (4.13)$$

$$\rho^0 \frac{\partial^2 v_i(t)}{\partial t^2} = (C_{ijkl} v_{k,l}(t))_{,j} + g_i(t) \quad (4.14)$$

$$\int_V v_i(t_2) \left(f_i(t_1) - \rho^0 \frac{\partial^2 u_i(t_1)}{\partial t^2} \right) dV + \int_V v_i(t_2) (C_{ijkl} u_{k,l}(t_1))_{,j} dV = 0 \quad (4.15)$$

$$\int_V u_i(t_1) \left(g_i(t_2) - \rho^0 \frac{\partial^2 v_i(t_2)}{\partial t^2} \right) dV + \int_V u_i(t_1) (C_{ijkl} v_{k,l}(t_2))_{,j} dV = 0 \quad (4.16)$$

$t_1 = t, t_2 = \tau - t$ として t に関して積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V v_i(\tau - t) \left(f_i(t) - \rho^0 \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} \right) dV + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S v_i(\tau - t) (C_{ijkl} u_{k,l}(t)) n_j dS \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V u_i(t) \left(g_i(\tau - t) - \rho^0 \frac{\partial^2 v_i(\tau - t)}{\partial t^2} \right) dV + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S u_i(t) (C_{ijkl} v_{k,l}(\tau - t)) n_j dS \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ v_i(\tau - t) \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} - u_i(t) \frac{\partial^2 v_i(\tau - t)}{\partial t^2} \right\} = 0 \quad (4.18)$$

なので,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V v_i(\tau - t) f_i(t) dV + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S v_i(\tau - t) (C_{ijkl} u_{k,l}(t)) n_j dS \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V u_i(t) g_i(\tau - t) dV + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S u_i(t) (C_{ijkl} v_{k,l}(\tau - t)) n_j dS \end{aligned} \quad (4.19)$$

境界面上で固定端条件 ($u_i = v_i = 0$) もしくは自由端条件 ($C_{ijkl} u_{k,l} n_j = C_{ijkl} v_{k,l} n_j = 0$) が成立していれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V v_i(\tau - t) f_i(t) dV = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V u_i(t) g_i(\tau - t) dV \quad (4.20)$$

$$f_i(t) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1) \delta(t - \tau_1) \quad (4.21)$$

$$g_i(t) = \delta_{iq} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) \delta(t + \tau_2) \quad (4.22)$$

or

$$g_i(\tau - t) = \delta_{iq} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2) \delta(\tau - t + \tau_2) \quad (4.23)$$

を選ぶと

$$u_i(t) = G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_1, \tau_1) \quad (4.24)$$

$$v_i(t) = G_{iq}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}_2, -\tau_2) \quad (4.25)$$

となるので,

$$G_{pq}(\boldsymbol{\xi}_1, \tau - \tau_1; \boldsymbol{\xi}_2, -\tau_2) = G_{qp}(\boldsymbol{\xi}_2, \tau + \tau_2; \boldsymbol{\xi}_1, \tau_1) \quad (4.26)$$

$\tau_1 = \tau_2 = 0$ とすると,

$$G_{pq}(\boldsymbol{\xi}_1, \tau; \boldsymbol{\xi}_2, 0) = G_{qp}(\boldsymbol{\xi}_2, \tau; \boldsymbol{\xi}_1, 0) \quad (4.27)$$

$\tau = 0$ とすると,

$$G_{pq}(\boldsymbol{\xi}_1, -\tau_1; \boldsymbol{\xi}_2, -\tau_2) = G_{qp}(\boldsymbol{\xi}_2, \tau_2; \boldsymbol{\xi}_1, \tau_1) \quad (4.28)$$

表現定理

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V v_i(\tau - t) f_i(t) dV + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S v_i(\tau - t) (C_{ijkl} u_{k,l}(t)) n_j dS \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V u_i(t) g_i(\tau - t) dV + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S u_i(t) (C_{ijkl} v_{k,l}(\tau - t)) n_j dS
\end{aligned} \tag{4.29}$$

で

$$g_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{ip} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t) \tag{4.30}$$

$$v_i(\mathbf{x}, t) = G_{ip}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, 0) \tag{4.31}$$

とすると,

$$\begin{aligned}
& u_p(\boldsymbol{\xi}, \tau) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V f_i(\mathbf{x}, t) G_{ip}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) dV \\
& \quad + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S [G_{ip}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) (C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}, t)) n_j \\
& \quad - u_i(\mathbf{x}, t) C_{ijkl} G_{kp,l}(\mathbf{x}, \tau - t; \boldsymbol{\xi}, 0) n_j] dS
\end{aligned} \tag{4.32}$$

変数を入れ替えて

$$\begin{aligned}
& u_p(\mathbf{x}, t) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) G_{ip}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV(\boldsymbol{\xi}) \\
& \quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S [G_{ip}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) (C_{ijkl} u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}, \tau) n_j) \\
& \quad - u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) C_{ijkl} G_{kp,l}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) n_j] dS(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned} \tag{4.33}$$

境界における変位 $u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ 及び traction $(C_{ijkl} u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}, \tau) n_j)$ をあたえれば, 内部の変位場は Green 関数を用いて表現できる.

断層すべりとモーメント テンソル

外力の働いていない系を考える. $f_i = 0$.

断層面の上面 Σ^+ 及び下面 Σ^- において下記の境界条件があるとする.

$$\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^+, \tau) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^-, \tau) \tag{4.34}$$

$$\tag{4.35}$$

この時, 表現定理から

$$u_p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} [\Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) C_{ijkl} G_{kp,l}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) n_j^-] dS(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.36}$$

相反定理を用いて書き換えると

$$u_p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\Sigma} [\Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) C_{ijkl} G_{pk,l}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) n_j^-] dS(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.37}$$

$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_s$ における点震源であると仮定できるとすると,

$$u_p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_{pk,l}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}_s, 0) \int_{\Sigma} [\Delta u_i C_{ijkl} n_j^-] dS(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.38}$$

or

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_{np,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}_s, 0) \int_{\Sigma} [\Delta u_i C_{ijpq} n_j^-] dS(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.39}$$

M_{pq} と $\mathbf{u}$ の関係式

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t G_{np,q}(\mathbf{x}, t - \tau; \mathbf{x}_s, 0) M_{pq}(\tau) d\tau \quad (4.40)$$

と見比べると

$$M_{pq}(\tau) = \int_{\Sigma} [\Delta u_i C_{ijpq} n_j^-] dS(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.41)$$

断層面に並行な変位の食い違いがある場合（典型的な地震断層の場合）:

$$\Delta u_i n_i = 0 \quad (4.42)$$

等方媒質では,

$$M_{pq} = \int_{\Sigma} [\mu (\Delta u_p n_q^- + \Delta u_q n_p^-)] dS \quad (4.43)$$

$\Delta \mathbf{u} = D \boldsymbol{\nu}$ の場合

$$M_{pq} = \mu D S (\nu_p n_q^- + \nu_q n_p^-) \quad (4.44)$$