

地球惑星物理学基礎演習 I No.6

040348I 桑原將旗

平成 23 年 12 月 2 日

【13】ラグランジュの未定乗数法

1.

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{S}(x, y, z) &= \int_{t_a}^{t_b} L(\vec{r} + \delta \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta \dot{\vec{r}}, t) + \lambda f(\vec{r} + \delta \vec{r}) - (L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \lambda f(\vec{r})) dt \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \{L(\vec{r} + \delta \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta \dot{\vec{r}}, t) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\} dt + \lambda \int_{t_a}^{t_b} f(\vec{r} + \delta \vec{r}) - f(\vec{r}) dt \\
 &= \delta S(x, y, z) + \lambda \delta f
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 $f(x, y, z) = 0$ の条件のもとでは、 $\delta f = 0$ であり、 $\delta \tilde{S}(x, y, z) = \delta S(x, y, z)$ なので、互いに極値を見つけないということになる。

また、1 次近似まで考えると、

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{S}(x, y, z) &= \int_{t_a}^{t_b} L(\vec{r} + \delta \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta \dot{\vec{r}}, t) + \lambda f(\vec{r} + \delta \vec{r}) - (L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \lambda f(\vec{r})) dt \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \delta \dot{\vec{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} dt \\
 &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \delta \vec{r} \right]_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \delta \vec{r} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} dt \quad (\delta \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \delta \vec{r}) \quad (\delta \vec{r}(t_a) = \delta \vec{r}(t_b) = 0) \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right\} \delta \vec{r} dt
 \end{aligned}$$

$\delta \vec{r}$ は任意なので、その中身が 0 でないといけない。

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$$

$L' = L + \lambda f$ とおくと、 $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$ より、

$$\frac{\partial L'}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \text{grad} f, \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$ とすると、

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \lambda \text{grad} f$$

ここで、 $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ 拘束力以外の力なる。よって、 $\lambda \text{grad} f$ が垂直抗力になることを示す。

物体は、 $f(x, y, z) = 0 (= c)$ 上を進行しているので、 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ での接ベクトルを置くと、

$$\left. \frac{f(\vec{r}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \text{grad} f|_{t=0} \cdot \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

これは、 $\text{grad} f$ に接ベクトルが垂直であることを示している。このとき、接ベクトルは任意なので、接平面に垂直である。よって、 $\lambda \text{grad} f$ が垂直抗力であり、 λ は垂直抗力に比例する。

【14】束縛運動

1.

束縛条件は $f(x, y) = x^2 + (y - a)^2 - a^2 = 0$ である。

$$L'(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda) = T - V + \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda\{x^2 + (y - a)^2 - a^2\}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x$$

$$m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg + 2\lambda(y - a)$$

$$m\ddot{y} = -mg + 2\lambda(y - a)$$

また、それぞれに対して、 $\dot{x}, \dot{y}$ をかけて、和をとると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right) = \frac{d}{dt}(-mgy + 2\lambda(x^2 + (y - a)^2))$$

ここで、 $(x^2 + (y - a)^2) = a^2$ なので、 $\frac{d}{dt}(2\lambda(x^2 + (y - a)^2)) = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = E$$

エネルギーは保存される。

2.

それぞれに、 $x, (y - a)$ をかけて和をとることにより、

$$m(x\ddot{x} + (y - a)\ddot{y}) = -mg(y - a) + 2\lambda(x^2 + (y - a)^2) = -mg(y - a) + 2\lambda a^2$$

$$m(x\ddot{x} + (y - a)\ddot{y}) + mg(y - a) = 2\lambda a^2$$

左辺は

$$\begin{aligned} m(x\ddot{x} + (y - a)\ddot{y}) + mg(y - a) &= m\frac{d}{dt}(x\dot{x} + (y - a)\dot{y}) - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(y - a) \\ &= m\frac{d}{dt}(x\dot{x} + (y - a)\dot{y}) - 2E + mg(3y - a) \end{aligned}$$

拘束条件から $x\dot{x} + (y - a)\dot{y} = 0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\lambda = \frac{mg(3y - a) - mv_0^2}{2a^2}$$

3.

垂直抗力は、 $\lambda \text{grad} f$ という形で表される。

$y = \frac{4}{3}a$ のとき、円塔から離れたので、垂直抗力が 0 になる。

$$\text{grad}f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-a) \end{pmatrix} \neq 0 (y = \frac{4}{3}a \text{ なので、})$$

したがって、 $\lambda = 0$ となる必要がある。

$$v_0 = \sqrt{3ga}$$

【15】ダランベールの原理とラグランジュ方程式

運動方程式は $F_i - p_i = 0$ これをつり合いの式とみて、ダランベールの式に代入すると、仮想変位を δr_i とする。

$$\sum_i (F_i - p_i) \dot{\delta r}_i = 0$$

ここで、力を拘束力 f_i とそれ以外の力 $F_i^{(a)}$ とすると、なめらかな拘束力の条件のもとでは、

$$\sum_i (F_i - p_i) \dot{\delta r}_i = 0$$

$$\sum_i (F_i^{(a)} - p_i) \cdot \delta r_i^{(r)} = 0$$

が成り立たなければならない。

1.

$r_i = r_i(q, t)$ なので、仮想変位は、 $\delta r_i^{(r)} = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$

$$v_i = \dot{r}_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \sum_i F_i \delta r_i &= \sum_i F_i \sum_j \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{p}_i \cdot \delta r_i &= \sum_i m \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_i m \ddot{r}_i \cdot \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{ij} m \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \end{aligned} \quad (2)$$

また、

$$\sum_i m \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i m_i v_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \quad (3)$$

ここで、 $r \rightarrow v$ に変換すればよいので、
 v_i を q_j で偏微分すると、

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

また、

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t}$$

また、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j}$$

よって、

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)$$

以上から、

$$\begin{aligned} \sum_i m \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

(4)

ダランベールの式は

$$\begin{aligned} \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j \end{aligned}$$

3.

ここで、 $F_i = -\partial_i V$ とおくと

$$Q_j = \sum_i -\partial_i V \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

また、 $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

【16】 ハミルトン形式

(21) を逆にといて、 $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} &= \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial p_i} \\ &= \dot{q}_i \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} &= \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial q_i} \\
&= \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial q_i} - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial q_i} \\
&= -\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} p_i = -\dot{p}_i
\end{aligned}$$

2.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right\} dt$$

$p_i(t), q_i(t)$ において、 $p_i(t) + \delta p_i(t), q_i(t) + \delta q_i(t)$ を考えると、
 $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0, \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i (p_i + \delta p_i)(\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - H(q + \delta q, p + \delta p, t) \right\} - \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right\} dt \\
&= [p_i \delta q_i]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i -\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right\} dt \\
&\quad \left(\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot{q}_i, \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0, \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \text{ より} \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \right\} dt \tag{6}
\end{aligned}$$

$\delta I = 0$ より、

$$\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = 0$$

3.

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \varphi \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} m (\vec{v}^2) - V(r, \theta, \varphi) \\
&= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 + (r \varphi \sin \theta)^2) - V(r, \theta, \varphi)
\end{aligned}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned}
H &= p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \\
&= p_r \frac{p_r}{m} + p_\theta \frac{p_\theta}{m r^2} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{p_r}{m} \right)^2 + r^2 \left(\frac{p_\theta}{m r^2} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \right) + V(r, \theta, \varphi) \\
&= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r, \theta, \varphi)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \\
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \theta} - \frac{\partial V}{\partial r} \\
\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2 \sin^3 \theta} \cos \theta - \frac{\partial V}{\partial \theta} \\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$