Levi-Civitaの記号でベクトル解析の初歩を 1

矢野　忠*

1　はじめに

この「研究と実践」で数回にわたって Levi-Civita の記号の縮約とそのベクトル解析への応用について論じてきた [1],[2],[3]。今回は新しい着想にもとづいて再挑戦をしてみよう。

電磁気学を本格的に学ぶときにベクトル解析が必要になってくる。それで、大学の物理学科や電気電子工学科等では電磁気学の講義の最初の数時間をとってベクトル解析の初歩を学ぶ。その中にベクトル代数・解析のいろいろな公式が出てくるが, それらを Levi-Civita の記号を用いて簡単に使えるようにしたいというのがこのエッセイのテーマである。

Levi-Civita の記号の縮約公式をどのように発見法的に導くかが少し難しかった。これは数学としては解決済みの問題 [1] ではあるが, 教育的には Levi-Civita の記号の縮約をどのようにやさしく導入するかが重要であり, それができれば, 一般の学生もベクトル解析の厄介さと手を切ることができる。

それはともかくまずベクトル解析での面倒さの一端を示すために, ベクトル解析に出てくる公式をまず列挙しておこう。

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{C} \cdot [\boldsymbol{D} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{D})] - \boldsymbol{D}[\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})] \\ &= \boldsymbol{B}[\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})] - \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D})]\end{aligned} \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot [(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] = [\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]^2 \tag{5}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) - (\Delta\,\boldsymbol{A}) \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0 \tag{8}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \tag{9}$$

ベクトル解析の本を開けばもっと多くの公式があるが、もううんざりといった感がある。特に終わりの４つの (6)-(9) は電磁気学ではよく使う。これらを Levi-Civita の記号を用いて簡単に導く方法を学ぶことにしよう。。

*松山市勝山町２丁目　e-mail: yanotad@earth.ocn.ne.jp

2　Levi-Civitaの記号の導入

Levi-Civitaの記号 ϵ_{ijk} を導入しよう。まず、3次元の直交座標系 $Oxyz$ を考える。x, y, z 軸方向の単位基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と表す。座標系が直交しているから, それぞれの単位ベクトルのベクトル積の間には

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{10}$$

が成り立っている。ところでこれらの式をまとめて書くためにつぎのLevi-Civitaの記号 ϵ_{ijk} を導入する。

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k)\ \text{が}\ (1, 2, 3)\ \text{の偶置換のとき} \\ -1 & (i, j, k)\ \text{が}\ (1, 2, 3)\ \text{の奇置換のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{11}$$

この記号を導入すると

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{12}$$

と表すことができる（テンソル解析では和をとる $\sum$ の記号を省略する。そのかわりに2度くり返された添字について和をとる（Einsteinの規約)。以下この規約に従う)。

試みに(12)にしたがって計算すれば, $i = 1, j = 2$ のとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 &= \epsilon_{121}\boldsymbol{e}_1 + \epsilon_{122}\boldsymbol{e}_2 + \epsilon_{123}\boldsymbol{e}_3 \\ &= \epsilon_{123}\boldsymbol{e}_3 \\ &= \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{13}$$

となる。同様に $i = 2, j = 3$ のとき $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ が, $i = 3, j = 1$ のとき $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ が得られる。

ここで, Levi-Civitaの記号の性質を見ておこう。(11)の ϵ_{ijk} で添字 ijk の ji を互いに置換して jik とすれば, $\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$ と元のものに負号がつく。これは一回の置換は元の配列に対して相対的に奇置換になっているからである。また, いま配列 ijk で ij に着目したが, これは配列 ik または jk のいずれであってもその添字の交換をすれば, もとの配列のときと比べて負号がつく。すなわち, 添字のどの二つの交換についてもLevi-Civitaの記号では反対称になっている。例えば,

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk} \tag{14}$$

であり, また

$$\epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} = (-1)^2\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk} \tag{15}$$

である。このことから $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ のとき, $\epsilon_{123} = 1$ ととれば, 偶置換のとき $+1$, 奇置換のとき -1 となる。また添字がその交換に対して反対称であることから, 例えば ϵ_{11k} は添字11を交換すれば, $\epsilon_{11k} = -\epsilon_{11k}$ となり, $\epsilon_{11k} = 0$ となる。したがって, Levi-Civitaの記号の性質として添字の交換に対して反対称であることが本質的である。

また, 添字 $(1, 2, 3)$ を $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ のようにサイクリックに動かすとき, 正順といい, $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$ のようにサイクリックに動かすとき, 逆順という。このとき配列 $(1, 2, 3)$ の偶置換はすべて正順から得られ, 奇置換はすべて逆順から得られる。したがって, (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の正順ならば $\epsilon_{ijk} = 1$ であり, 逆順ならば $\epsilon_{ijk} = -1$ である。

3　Levi-Civita の記号の積の行列式表示

いま $\boldsymbol{e}_k$ と $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$ とのスカラー３重積を考えよう。すなわち、

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijp} \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_k \tag{16}$$

単位直交基底ベクトル $\boldsymbol{e}_p$ と $\boldsymbol{e}_k$ のスカラー積は

$$\boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{pk} \tag{17}$$

である。ここで、δ_{pk} は Kronecker の記号

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1 & p = k \\ 0 & p \neq k \end{cases} \tag{18}$$

である。この Kronecker の δ を用いれば、(16) は

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijp} \delta_{pk} = \epsilon_{ijk} \tag{19}$$

と 3 次元の Levi-Civita の記号は単位直交基底ベクトルのスカラー 3 重積で表せる。

つぎに 2 つの Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} と ϵ_{pqr} の積をつくろう。

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = [(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k][(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q) \cdot \boldsymbol{e}_r] \tag{20}$$

ところで, $(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k$ と $(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q) \cdot \boldsymbol{e}_r$ はそれぞれ行列式で

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i)_1 & (\boldsymbol{e}_i)_2 & (\boldsymbol{e}_i)_3 \\ (\boldsymbol{e}_j)_1 & (\boldsymbol{e}_j)_2 & (\boldsymbol{e}_j)_3 \\ (\boldsymbol{e}_k)_1 & (\boldsymbol{e}_k)_2 & (\boldsymbol{e}_k)_3 \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_q) \cdot \boldsymbol{e}_r = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_p)_1 & (\boldsymbol{e}_p)_2 & (\boldsymbol{e}_p)_3 \\ (\boldsymbol{e}_q)_1 & (\boldsymbol{e}_q)_2 & (\boldsymbol{e}_q)_3 \\ (\boldsymbol{e}_r)_1 & (\boldsymbol{e}_r)_2 & (\boldsymbol{e}_r)_3 \end{vmatrix} \tag{22}$$

と表せるから, (20) は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i)_1 & (\boldsymbol{e}_i)_2 & (\boldsymbol{e}_i)_3 \\ (\boldsymbol{e}_j)_1 & (\boldsymbol{e}_j)_2 & (\boldsymbol{e}_j)_3 \\ (\boldsymbol{e}_k)_1 & (\boldsymbol{e}_k)_2 & (\boldsymbol{e}_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_p)_1 & (\boldsymbol{e}_p)_2 & (\boldsymbol{e}_p)_3 \\ (\boldsymbol{e}_q)_1 & (\boldsymbol{e}_q)_2 & (\boldsymbol{e}_q)_3 \\ (\boldsymbol{e}_r)_1 & (\boldsymbol{e}_r)_2 & (\boldsymbol{e}_r)_3 \end{vmatrix} \tag{23}$$

となる。行列式はその行と列を入れ替えても値は変わらないから, ２番目の行列の行と列を入れ替えて, ２つの行列式の積を計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_i)_1 & (\boldsymbol{e}_i)_2 & (\boldsymbol{e}_i)_3 \\ (\boldsymbol{e}_j)_1 & (\boldsymbol{e}_j)_2 & (\boldsymbol{e}_j)_3 \\ (\boldsymbol{e}_k)_1 & (\boldsymbol{e}_k)_2 & (\boldsymbol{e}_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_p)_1 & (\boldsymbol{e}_q)_1 & (\boldsymbol{e}_r)_1 \\ (\boldsymbol{e}_p)_2 & (\boldsymbol{e}_q)_2 & (\boldsymbol{e}_r)_2 \\ (\boldsymbol{e}_p)_3 & (\boldsymbol{e}_q)_3 & (\boldsymbol{e}_r)_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_p & \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_q & \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_p & \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_q & \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_p & \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_q & \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_r \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

これで $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ を Kronecker の記号を用いて行列式で表すことができた。

4 Levi-Civitaの記号の縮約公式

(24) から Levi-Civita の記号の積の縮約公式を導こう。まず (24) 式で $k = r$ とおいて縮約をすれば,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix} \\
&= \left[\delta_{ik} \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} - \delta_{jk} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} + \delta_{kk} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \right] \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{ip} & \delta_{iq} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}
\end{aligned} \tag{25}$$

が得られる。(25) の右辺の 3 行目で $\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ であることを用いた。

さらに (25) で $j = q$ とおいて縮約をすれば,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} &= \delta_{ip}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jp} \\
&= 3\delta_{ip} - \delta_{ip} \\
&= 2\delta_{ip}
\end{aligned} \tag{26}$$

が, また (26) でさらに $i = p$ とおいて縮約すれば

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 \tag{27}$$

が得られる。

ここで縮約公式をまとめておこう。

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \tag{25}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip} \tag{26}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{27}$$

ベクトル解析で特に有用なのは (25) である。

5 ベクトル解析の公式の導出

ベクトル解析の公式 (1)-(9) を導く前に準備をしておこう。ベクトル $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{C}$ のベクトル積 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ は Levi-Civita の記号を用いれば

$$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k \tag{28}$$

と表すことができ, また $\nabla \times \boldsymbol{A}$ は同様に

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k \tag{29}$$

と表すことができる。

ここで, ちょっと脇道にそれるかもしれないが, Levi-Civita の記号の導入の理由を推理してみよう。Levi-Civita の記号が導入されたのはこのベクトル積の成分を表すためではなかったかと思われる。$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ は直交座標系での成分では $(B_2C_3 - B_3C_2, B_3C_1 - B_1C_3, B_1C_2 - B_2C_1)$ と表されるが, この表示では $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ の第 i 成分 $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i$ が i で表されるようになっていない。

例えば, 第 1 成分 $B_2C_3 - B_3C_2$ にはそれが第 1 成分であることを表す 1 という数字がどこにも入っていない。第 2 成分, 第 3 成分も同様である。これにはまったく満足できない。それで第 i 成分はそれが第 i 成分であることがわかるように $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i$ を添字 i から始まるように書き表したい。そのためにどんな記号を導入したらよいか。Levi-Civita はそう考えたに違いない。それが ϵ_{ijk} を考案した理由であると思われる。

では具体的にその成分を考えてみよう。$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k$ で例えば $i = 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_1 &= \epsilon_{1jk} B_j C_k \\
&= \epsilon_{11k} B_1 C_k + \epsilon_{12k} B_2 C_k + \epsilon_{13k} B_3 C_k \\
&= \epsilon_{121} B_2 C_1 + \epsilon_{122} B_2 C_2 + \epsilon_{123} B_2 C_3 + \epsilon_{131} B_3 C_1 + \epsilon_{132} B_3 C_2 + \epsilon_{133} B_3 C_3 \\
&= \epsilon_{123} B_2 C_3 + \epsilon_{132} B_3 C_2 \\
&= B_2 C_3 - B_3 C_2
\end{aligned} \tag{30}$$

ここで, あからさまに $\epsilon_{11k} B_1 C_k$ の k についての和をとっていないのは Levi-Civita の記号の定義から $\epsilon_{11k} = 0$ だからである。第 2, 第 3 成分についてもまったく同様である。読者は第 2 成分と第 3 成分について紙の上に自分の手で書き下して確かめて見られたがよい。

話の本筋に帰って, つぎにベクトルのスカラー 3 重積 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ について考えてみよう。$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とおけば,

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} = A_i D_i = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \tag{31}$$

この最後の式は 3 次の行列式の定義式であるから

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_1 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{32}$$

とも表せる。

さて, これからベクトル解析の公式 (1)-(9) の導出について述べよう。

まず (1) についてはスカラー 3 重積の場合と同様に $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とおけば, $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}$

であるから,

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_i &= [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}]_i \\
&= \epsilon_{ijk}A_jD_k \\
&= \epsilon_{ijk}A_j\epsilon_{klm}B_lC_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}A_jB_lC_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m \\
&= B_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_i(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})
\end{aligned}
\tag{33}
$$

したがって,

$$
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1}
$$

が成り立つ。この公式は英語を話す国々では back-cab ルール（(1) の覚え方) として知られている。

つぎに公式 (2) を導こう。まず $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$ とおけば, $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{F}$ であるから

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{F} \\
&= E_iF_i \\
&= \epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{imn}C_mD_n \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}A_jB_kC_mD_n \\
&= (\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})A_jB_kC_mD_n \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})
\end{aligned}
\tag{34}
$$

したがって,

$$
(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{2}
$$

ついでに, これに関係した

$$
\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) \tag{3}
$$

が成り立つことを見ておこう。これは $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ とおけば, スカラー 3 重積の中で文字をサイクリックに変えても値は変わらないというスカラー 3 重積の性質から,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] &= \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E}) \\
&= \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) \\
&= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})
\end{aligned}
\tag{35}
$$

であることがわかるが, または

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] &= \boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E}] \\
&= C_i\epsilon_{ijk}D_jE_k \\
&= C_i\epsilon_{ijk}D_j\epsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \epsilon_{klm}A_lB_m\epsilon_{kij}C_iD_j \\
&= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})
\end{aligned}
\tag{36}
$$

としてもよい。ここで 3 行目から 4 行目に移るときに, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ であることを用いた。

もっとも (3) が成り立つことから逆に (2) が成立することは Levi-Civita の記号を用いなくとも簡単にわかる。それは

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})] \\ &= \boldsymbol{C}\cdot[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})] \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\end{aligned} \tag{37}$$

が得られるからである。

つぎに公式 (4) を導びこう。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$ とおけば, $[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$ であるから,

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]_i &= [\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}]_i \\ &= \epsilon_{ijk}E_jF_k \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q \\ &= -\epsilon_{jik}\epsilon_{jlm}A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q \\ &= -(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl})A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q \\ &= -(A_iB_k-B_iA_k)\epsilon_{kpq}C_pD_q \\ &= B_i\epsilon_{kpq}A_kC_pD_q-A_i\epsilon_{kpq}B_kC_pD_q \\ &= B_i[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]-A_i[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\end{aligned} \tag{38}$$

または

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A_lB_m\epsilon_{kpq}C_pD_q \\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{kpq}\epsilon_{jlm}A_lB_mC_pD_q \\ &= (\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})\epsilon_{jlm}A_lB_mC_pD_q \\ &= (C_iD_j-D_iC_j)\epsilon_{jlm}A_lB_m \\ &= C_i\epsilon_{lmj}A_lB_mD_j-D_i\epsilon_{lmj}A_lB_mC_j \\ &= C_i[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]-D_i[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\end{aligned} \tag{39}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{D}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})] \\ &= \boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\end{aligned} \tag{4}$$

が成立する。

この公式に関してはベクトル解析によってもそれほどその導出は難しくはない。それは $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ とおいてベクトル 3 重積の公式を用いるか, $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{F}$ とおいてベクトル 3 重積の公式を用いれば, すぐに公式 (4) が導出されるからである。

公式 (5) を導こう。$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}$ とおけば, (5) の左辺は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot[(\boldsymbol{C}\times$

$\boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] = \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})$ と表せるから,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot [(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] &= \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) \\
&= E_i \epsilon_{ijk} F_j G_k \\
&= \epsilon_{ilm} B_l C_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{jpq} C_p A_q \epsilon_{krs} A_r B_s \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} B_l C_m \epsilon_{jpq} C_p A_q \epsilon_{krs} A_r B_s \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) B_l C_m \epsilon_{jpq} C_p A_q \epsilon_{krs} A_r B_s \\
&= (B_j C_k - B_k C_j) \epsilon_{jpq} C_p A_q \epsilon_{krs} A_r B_s \\
&= \epsilon_{jpq} B_j C_p A_q \epsilon_{krs} C_k A_r B_s \\
&= [\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]^2
\end{aligned} \tag{40}
$$

と導出される。ここで, 右辺の 6 行目の第 2 項で $\epsilon_{jpq} C_j C_p A_q = 0$ であることを用いている。
　したがって,

$$
(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot [(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] = [\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]^2 \tag{5}
$$

が成立する。面倒なのはここまでで, (6)-(9) は比較的簡単である。
　まず公式 (6) は $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$ とおけば, $(\nabla \times \boldsymbol{A})_k = H_k = \epsilon_{klm} \nabla_l A_m$ と表されるから,

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}]_i &= [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_i \\
&= [\nabla \times \boldsymbol{H}]_i \\
&= \epsilon_{ijk} \nabla_j H_k \\
&= \epsilon_{ijk} \nabla_j (\epsilon_{klm} \nabla_l A_m) \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \nabla_j \nabla_l A_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \nabla_j \nabla_l A_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \nabla_j \nabla_l A_m \\
&= \nabla_i (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 A_i \\
&= [\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})]_i - (\Delta \boldsymbol{A})_i
\end{aligned} \tag{41}
$$

ここで, ϵ_{klm} は微分演算子 ∇_j に対して定数の扱いを受けている。この性質は以下でもくり返して用いられる。したがって,

$$
\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) - (\Delta \boldsymbol{A}) \tag{6}
$$

が成り立つ。
　つぎの公式 (7) は $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$ とおけば, $H_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{H} \\
&= \nabla_i H_i \\
&= \nabla_i (\epsilon_{ijk} \nabla_j A_k) \\
&= \epsilon_{ijk} \nabla_i \nabla_j A_k \\
&= 0
\end{aligned} \tag{42}
$$

で導かれる。ここでは ϵ_{ijk} は添字 ij について反対称であるが, $\nabla_i \nabla_j$ は添字 ij について対称であることを用いた。したがって,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0 \tag{7}$$

が成り立つ。

公式 (8) は $\nabla\phi = \boldsymbol{G}$ とおけば, $\nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \boldsymbol{G}$ と表せ, また $\nabla_k \phi = G_k$ であるから,

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\phi]_i &= [\nabla \times (\nabla\phi)]_i \\
&= [\nabla \times \boldsymbol{G}]_i \\
&= \epsilon_{ijk}\nabla_j G_k \\
&= \epsilon_{ijk}\nabla_j(\nabla_k \phi) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{43}$$

で導かれる。ここでも ϵ_{ijk} の添字 jk について反対称であることと $\nabla_j \nabla_k$ が添字 jk について対称であることを用いた。したがって,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0 \tag{8}$$

が成り立つ。また公式 (9) は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}$ とおけば, $G_i = \epsilon_{ijk}E_j H_k$ であるから,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{G} \\
&= \nabla_i G_i \\
&= \nabla_i(\epsilon_{ijk}E_j H_k) \\
&= \epsilon_{ijk}(\nabla_i E_j)H_k + \epsilon_{ijk}E_j(\nabla_i H_k) \\
&= H_k \epsilon_{kij}(\nabla_i E_j) - E_j \epsilon_{jik}(\nabla_i H_k) \\
&= \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\
&= \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{44}$$

で導かれる。したがって,

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \tag{9}$$

が成り立つ。

6 おわりに

ベクトル解析の公式を Levi-Civita の記号が使われているものを主として見てきた。Levi-Civita の記号の縮約公式 (25) は本当に有用である。Levi-Civita の記号が使われていないものはもっと簡単でほとんどテンソルで書けば, 自明なものがほとんである。以前には、しかしどうやって縮約公式 (25) を導くかが大学教育で教えるための大きな障害になっていたが, それも今回の試みでクリアできたと思う。このアイディアをご教示くださった川崎守（岐阜大学）さんに感謝をしたい。

Levi-Civita の記号のご利益を強調してきたが, しかし結果としてはそれによらなくとも考え方しだいではベクトル解析はそんなに難しくはないという結論に至りそうである。それについてはまた別の機会に譲りたいし, また面倒なベクトル解析の公式で議論しなかったものも残っている。続編としてはまずは残された面倒なベクトル解析の公式を議論することにしたい。(2006.7.18)

参考文献

[1] 矢野　忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践（愛数協）, 第 18 号, (1985. 3) 7-17, 第 65 号, (1998. 3) 2-17.

[2] 矢野　忠,「Levi-Civita の記号の縮約」再論, 研究と実践（愛数協）, 第 64 号, (1997. 3) 2-10.

[3] 矢野　忠,「Levi-Civita の記号の縮約」再々論, 研究と実践（愛数協）, 第 77 号, (2001. 12) 16-20.