

地球惑星物理学基礎演習 No.1

040348I 桑原將旗

2011/10/12

(問 1)

(a)

$\forall \epsilon > 0$ を一つ固定する。この $\epsilon > 0$ に対して、

$$\exists n_0 \in N, \forall n \in N : n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| < \epsilon$$

が成り立つことを示せばよい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ だから、 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して、 $\exists n_1 \in N$,

$$\forall n \in N : n > n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。そこで、存在が保証されたこのような $n_1 \in N$ を一つとり固定する。

このとき、 $(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - \alpha) \equiv (\text{定数})$ だから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - \alpha)}{n} = 0$$

したがって、 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して、 $\exists n_2 \in N$

$$\forall n \in N : n > n_2 \Rightarrow \left| \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - \alpha)}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。そこで、さらに、存在が保証されたこのような $n_2 \in N$ を一つ取り、 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とする
このとき、 $n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2$ だから、 $\forall n \in N$ にたいして、 $n > n_0$ ならば

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - \alpha) + (a_{n_1+1} - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - \alpha)}{n} \right| + \left| \frac{(a_{n_1+1} - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - \alpha)}{n} \right| + \frac{|a_{n_1+1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{|a_{n_1+1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - n_1}{n} \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(b)

$\forall \epsilon > 0$ を一つ固定する。この $\epsilon > 0$ に対して、

$$\exists n_0 \in N, \forall n \in N : n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{n} - \alpha \right| < \epsilon$$

が成り立つことを示せばよい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \alpha$ だから、 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して、 $\exists n_1 \in N$,

$$\forall n \in N : n > n_1 \Rightarrow |(a_{n+1} - a_n) - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。そこで、存在が保証されたこのような $n_1 \in N$ を1つとり固定する。

このとき、 $(a_1 - \alpha) + (a_2 - a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - a_{n_1-1} - \alpha) \equiv (\text{定数})$ だから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - a_{n_1-1} - \alpha)}{n} = 0$$

したがって、 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して、 $\exists n_2 \in N$

$$\forall n \in N : n > n_2 \Rightarrow \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - a_{n_1-1} - \alpha)}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。そこで、さらに、存在が保証されたこのような $n_2 \in N$ を一つ取り、 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とする

このとき、 $n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2$ だから、 $\forall n \in N$ にたいして、 $n > n_0$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_n}{n} - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - a_{n_1-1} - \alpha)}{n} + \frac{(a_{n_1+1} - a_{n_1} - \alpha) + \cdots + (a_n - a_{n-1} - \alpha)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - a_{n_1-1} - \alpha)}{n} \right| + \left| \frac{(a_{n_1+1} - a_{n_1} - \alpha) + \cdots + (a_n - a_{n-1} - \alpha)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{n_1} - a_{n_1-1} - \alpha)}{n} \right| + \frac{|a_{n_1+1} - a_{n_1} - \alpha| + \cdots + |a_n - a_{n-1} - \alpha|}{n} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{|a_{n_1+1} - a_{n_1} - \alpha| + \cdots + |a_n - a_{n-1} - \alpha|}{n} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - n_1}{n} \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(c) ($\Rightarrow$)

$\forall \epsilon > 0$ を一つ固定する。この $\epsilon > 0$ に対して、

$$\exists n_0 \in N, \forall p, q \in N : p > n_0, q > n_0 \Rightarrow |z_p - z_q| < \epsilon$$

が成り立つことを示せばよい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ だから、 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して、 $\exists n_1, n_2 \in N$,

$$\forall p \in N : p > n_1 \Rightarrow |z_p - z| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall q \in N : q > n_2 \Rightarrow |z_q - z| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。そこで、存在が保証されたこのような $n_1, n_2 \in N$ を1組とり、 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とする
このとき、 $n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2$ だから、 $\forall n \in N$ にたいして、 $n > n_0$ ならば

$$\begin{aligned} |z_p - z_q| &= |z_p - z + (z - z_q)| \\ &\leq |z_p - z| + |z_q - z| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(c) ($\Leftarrow$)

$\forall \epsilon > 0$ を一つ固定する。この $\epsilon > 0$ に対して、

$$\exists n_0 \in N, \forall n \in N : n > n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon$$

が成り立つことを示せばよい。

また、 $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$ と置くと、 $\frac{\epsilon}{\sqrt{2}} > 0$ たいして、

$$\exists n_1, n_2 \in N, \forall n \in N : n > n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \forall n \in N : n > n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

このような、 n_1, n_2 の存在があるとする。

そこで、 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とすると、 $n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2$ より、

$$n > n_0 \Rightarrow |z_n - z| < |x_n + iy_n - x - iy| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \epsilon$$

となり、題意を満たす。

また、 $\forall \epsilon > 0$ を一つ固定する。この $\epsilon > 0$ に対して、

$$\exists N \in N, p \geq N, q \geq N \Rightarrow |z_p - z_q| < |x_p + iy_p - x_q - iy_q| = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} < \epsilon$$

よって、 $\exists N \in N, p \geq N, q \geq N \Rightarrow |x_p - x_q| < \epsilon, |y_p - y_q| < \epsilon$ となる。

ここで、 $\epsilon = 1$ として、

$$\exists N' \in N \Rightarrow \forall p, q \geq N', |x_p - x_q| < 1$$

$q = N'$ として

$$\forall p \geq N', |x_p - x_{N'}| < 1$$

$p \geq N'$ ならば、

$$|x_p| \leq |x_p - x_{N'}| + |x_{N'}| < 1 + |x_{N'}|$$

$\forall n \in N$ に対して、 $|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{N'-1}|, 1 + |x_{N'}|\}$

よって、 $\{x_n\}$ は有界。

よって、ボルツァノ・ワイエルトラスの定理より

$\{x_n\}$ のある部分列、 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する

$x \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k}$ とすると

$\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} > 0$ に対して

$$\forall n_k \in N : n_k > n_3 \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}$$

が成り立つ。そこで、存在が保証されたこのような $n_3 \in N$ を一つ取り、固定する。
 また、 $\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} > 0$ に対して

$$\forall n, n_k \in N : n, n_k > n_2 \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}$$

が成り立つ。そこで、存在が保証されたこのような $n_4 \in N$ を一つ取り、固定し、 $n_1 = \max\{n_3, n_4\}$ とすると

$n_1 \geq n_3, n_1 \geq n_4$ より $n > n_1$ ならば

$$|x_n - x| < |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

同様にして

$n > n_2$ ならば、 $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ となる。

そこで、 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とすると、 $n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2$ より、 $n > n_0$ ならば

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon$$

(問 2)

(a)i.

$$\exists N \in N \text{ にたいして、} n \geq N \Rightarrow a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq K$$

$\sum u_n$ が正項級数より、 $u_{n+1} > 0$

よって、 $a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geq K u_{n+1} > 0$

$$a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n \geq K u_n > 0$$

ここで、 $n = N + 1, \dots, N'$ まで両辺を足すと

$$\sum_{n=N+1}^{N'} (a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n) \geq \sum_{n=N+1}^{N'} K u_n > 0$$

となる。

$$a_N u_N > a_N u_N - a_{N'} u_{N'} \geq \sum_{n=N+1}^{N'} K u_n > 0$$

$$a_N u_N + \sum_{n=1}^N K u_n > \sum_{n=1}^{N'} K u_n > 0$$

$P = \frac{a_N u_N + \sum_{n=1}^N K u_n}{K}$ とおくと、P は正定数より、

$$P > \sum_{n=1}^{N'} u_n > 0$$

よって、上に有界。ここで、 $\sum u_n$ は正項級数なので単調増加なので、収束する。

(a)ii.

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ にたいして、} n \geq N \Rightarrow a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0$$

$\sum u_n$ が正項級数より、 $u_{n+1} > 0$

よって、 $a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \leq 0$

ここで、 $n = N, \dots, N'$ まで両辺を足すと

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{N'} (a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n) &\leq 0 \\ a_N u_N - a_{N'+1} u_{N'+1} &\leq 0 \\ \frac{a_N}{a_{N'+1}} u_N &\leq u_{N'+1} \end{aligned}$$

ここで、 $N' + 1 = n$ とする。

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ にたいして、} n \geq N + 1 \Rightarrow \frac{a_N}{a_n} u_N \leq u_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N''} u_n &= \sum_{n=1}^N u_n + \sum_{n=N+1}^{N''} u_n \\ &\geq \sum_{n=1}^N u_n + \sum_{n=N+1}^{N''} \frac{a_N}{a_n} u_N \\ &= \sum_{n=1}^N u_n + a_N u_N \sum_{n=N+1}^{N''} \frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

ここで、 $N'' \rightarrow \infty$ とすると、

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ が発散するので、それから、 $\sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} = (\text{定数})$ を除いた、 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ も発散する。

以上から、 $\sum u_n$ は発散する。

(b)i.

任意の $\epsilon > 0$ にたいして、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、

$n > N$ のとき、 $|a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} - K| < \epsilon$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > K - \epsilon$$

ここで、 $K > \epsilon > 0$ となるように、 ϵ, N を定める事ができるので、その N を n_1 とすると、

$n > n_1$ のとき、 $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > K - \epsilon > 0$

これは、(a)i より、 $\sum u_n$ は収束する。

(b)ii.

任意の $\epsilon > 0$ にたいして、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、

$n > N$ のとき、 $|a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} - K| < \epsilon$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < K + \epsilon$$

ここで、 $-K > \epsilon > 0$ となるように、 ϵ, N を定める事ができるので、その N を n_1 とすると、
 $n > n_1$ のとき、 $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < K + \epsilon < 0$
 これは、(a)ii より、 $\sum u_n$ は収束する。

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = P$$

とする。任意の $\epsilon > 0$ にたしして、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、
 $n > N$ のとき、 $|n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - P| < \epsilon$

(i) $p > 1$ のとき

$$\begin{aligned} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - P &> -\epsilon \\ n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) &> (p-1) - \epsilon \end{aligned}$$

ここ $(p-1) > 0$ より、 $(p-1) > \epsilon > 0$ となるように、 ϵ, N を定める事ができるので、その N を n_1 とすると、
 $n > n_1$ のとき、 $a_n = n$ とすると、 $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > K > 0$ ($K = (p-1) - \epsilon$)
 よって、(a)i より、 $\sum u_n$ は収束する。

(ii) $p < 1$ のとき

$$\begin{aligned} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - P &< \epsilon \\ n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) &< (p-1) + \epsilon \end{aligned}$$

ここ $(p-1) < 0$ より、 $-(p-1) > \epsilon > 0$ となるように、 ϵ, N を定める事ができるので、その N を n_1 とすると、
 $n > n_1$ のとき、 $a_n = n$ とすると、 $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < K < 0$ ($K = (p-1) + \epsilon$)

また、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するので、
 よって、(a)ii より、 $\sum u_n$ は収束する。

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = P$$

とする。任意の $\epsilon > 0$ にたしして、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、
 $n > N$ のとき、 $\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} - P \right| < \epsilon$

(i) $p > 1$ のとき

$$1 \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > (p-1) - \epsilon$$

ここ $(p-1) > 0$ より、 $(p-1) > \epsilon > 0$ となるように、 ϵ, N を定める事ができるので、その N を n_1 とすると、

$n > n_1$ のとき、 $a_n = 1$ とすると、 $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > K > 0 (K = (p-1) - \epsilon)$
よって、(a)i より、 $\sum u_n$ は収束する。

(ii) $p < 1$ のとき

$$1 \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 < (p-1) + \epsilon$$

ここ $(p-1) < 0$ より、 $-(p-1) > \epsilon > 0$ となるように、 ϵ, N を定める事ができるので、その N を n_1 とすると、

$n > n_1$ のとき、 $a_n = 1$ とすると、 $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < K < 0 (K = (p-1) + \epsilon)$

また、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ は発散するので、
よって、(a)ii より、 $\sum u_n$ は収束する。

(e)

$$n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = n((1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^p}) - 1) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{p-1}}$$

$\{\gamma_n\}$ は有界列なので、ある数 $M(> 0)$ 対して、 $\forall n \in N |\gamma_n| < M \forall \epsilon > 0$ を一つ固定する。この $\epsilon > 0$ に対して、

$$n_0 > (\frac{M}{\epsilon})^{\frac{1}{p-1}}$$

となる、 n_0 をとる、 $\forall n > n_0$ にたいして、

$$|n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) - \beta| = |\frac{\gamma_n}{n^{p-1}}| = \frac{|\gamma_n|}{M} \epsilon < \epsilon$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = \beta$$

2.(c) より、 $\beta > 1$ とき、収束する。 $\beta < 1$ のとき、発散する。

$\beta = 1$ とき、

$$a_n = n \log(n+1)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} &= n \log(n+1) (1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^p}) - (n+1) \log(n+2) \\ &= n(1 + \frac{1}{n}) \log(n+1) - (n+1) \log(n+2) + \frac{\gamma_n}{n^{p-1}} \log(n+1) \\ &= \log(\frac{n+1}{n+2})^{n+1} + \gamma_n \frac{\log(n+1)}{n^{p-1}} \\ &= \log(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}})^{n+1} + \gamma_n \frac{\log n}{n^{p-1}} \end{aligned}$$

ここで

$$\log\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n+1} = \log e - \log e^2 \rightarrow -1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \rightarrow \log(e \times 1) = 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$, \log\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1} = \log\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \rightarrow \log(e^2 \times 1) = 2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\{\gamma_n\}$ は有界列なので、ある数 $M(>0)$ 対して、 $\forall n \in N |\gamma_n| < M$

$$|\gamma_n \frac{\log(n+1)}{n^{p-1}}| < M \left| \frac{1}{p-1} \frac{\log(n+1)}{\log n} \frac{\log n^{p-1}}{n^{p-1}} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$(\frac{\log n^{p-1}}{n^{p-1}} \rightarrow 0 \quad (n^{p-1} \rightarrow \infty) \text{ より、})$

以上から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = -1$$

ここで、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n+1)} \\ &> \int_1^{\infty} \frac{1}{x \log(x+1)} dx \\ &> \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1) \log(x+1)} dx \\ &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [\log(\log x)]_2^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\log(\log N) - \log(\log 2)) = \infty \end{aligned}$$

よって、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ は、発散する

以上から、2(b) より、発散する.

(問 3)

(i) $|z| < 1$ のとき

$$F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k \right| = \left| \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \right| |z|^k$$

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \right| |z|^k}{\left| \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(k+1)! (c)_{k+1}} \right| |z|^{k+1}} &= \left| \frac{(a)_k}{(a)_{k+1}} \frac{(b)_k}{(b)_{k+1}} \frac{(c)_{k+1}}{(c)_k} \frac{k!}{(k+1)!} \right| |z|^{-1} \\ &= \left| \frac{(c+n)(1+n)}{(a+n)(b+n)} \right| |z|^{-1} \\ &= \left| \frac{(1+\frac{c}{n})(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})} \right| \times \frac{1}{|z|} \rightarrow \frac{1}{|z|} > 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

よって、2.(d) より 絶対収束する。

(ii) $|z| = 1$ かつ $\Re(c - a - b) > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
F(a, b, c; |z| = 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \right| \\
\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \left| \frac{n^2 + (c+1)n + c}{n^2 + (a+b)n + ab} \right| = \left| \frac{n^2 + (a+b)n + ab + (c-a-b+1)n + c-ab}{n^2 + (a+b)n + ab} \right| \\
&= \left| 1 + \frac{c-a-b+1}{n(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})} + \frac{c-ab}{n^2(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})} \right| \\
&\leq 1 + \frac{1}{n} \frac{|c-a-b+1|}{|(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})|} + \frac{1}{n^2} \frac{|c-ab|}{|(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})|}
\end{aligned}$$

ここで、 $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)$ を考えると、

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{|c-a-b+1|}{|(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})|} + \frac{1}{n} \frac{|c-ab|}{|(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})|} \rightarrow |c-a-b+1| \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\Re(c-a-b) > 0$ より、 $(c-a-b) = p+iq$ ($p > 0$) とすると

$$|c-a-b+1| = |(p+1)+iq| = (p+1)^2 + q^2 > (p+1)^2 > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = |c-a-b+1| > 1$$

よって、2(c) より、絶対収束する。

(問 4)

$|u_n(z)| < M_n$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| < \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

となり、 $\sum M_n$ が収束するので、

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ は収束し、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ は絶対収束する。

$\sum M_n$ が収束するので、 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\exists N \in \mathbb{N}$ をとり、

$m > n > N$ のとき、コーシーの定理より、

$$|U_n(z) + \cdots + U_m(z)| \leq |U_n(z)| + \cdots + |U_m(z)| < M_n + \cdots + M_m \leq |M_n + \cdots + M_m| < \epsilon$$

以上より、コーシーの定理より、

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ は一様収束する。

(問 5)

(a)

$$z_n = \frac{1}{n} e^{i \frac{n\pi}{4}} = \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$|z_n - 0| = \left| \frac{1}{n} e^{i \frac{n\pi}{4}} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

(b)

$$z = re^{i\theta}, \bar{z} = re^{-i\theta}$$

と置ける.

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{2i\theta} \rightarrow e^{2i\theta} (z \rightarrow 0, (r \rightarrow 0))$$

よって、 θ により変化するので、極限は無し、

(c)

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\frac{z + \bar{z}}{|z|} = \frac{2r \cos \theta}{r} = 2 \cos \theta \rightarrow 2 \cos \theta (z \rightarrow 0)$$

となり、 $z = 0$ で連続でない.