

地球惑星物理学基礎演習 No.6

040348I 桑原將旗

平成 24 年 1 月 26 日

問い 1

(a)

$$(\text{左辺}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0)$$

$$(\text{右辺}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\epsilon y) \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{\phi(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \phi(0)$$

ここで、 $x = \epsilon y$ であり、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi$ を使った、

1.(b)

下半面で、解析的であると仮定する。

$$\oint_c \frac{\phi(z)}{z + i\epsilon} dz = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{x + i\epsilon} + \int_{C_2}$$

左辺は、 $z = -i\epsilon$ で特異点を持つので、留数定理より、

$$\oint_c \frac{\phi(z)}{z + i\epsilon} dz = 2\pi i \phi(-i\epsilon) \rightarrow 2\pi i \phi(0) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

よって、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{x + i\epsilon} = -2\pi i \phi(0)$$

また、右辺は、ドーナツ型の上半円を考えればよい、

$$\oint_c \frac{\phi(z)}{z} dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

内部では特異点がない、 C_1 は主値となり、 C_3 は、半径を無限大にすると零になる。 C_2 上では、 $z = \epsilon e^{i\theta}$ ($\pi \rightarrow 0$)

$$\int_{C_2} = \int_{\pi}^0 \frac{\phi(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = \int_{\pi}^0 \phi(\epsilon e^{i\theta}) i d\theta \rightarrow -\pi i \phi(0) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

よって、

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = -\pi i \phi(0)$$

また、

$$-i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx = -\pi i \phi(0)$$

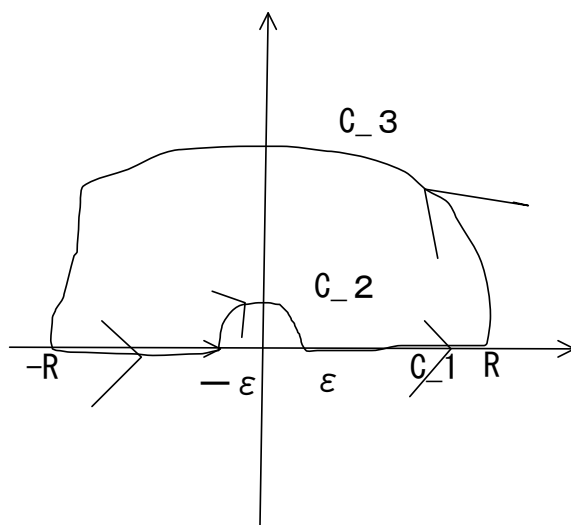


図 1:

以上まとめると、題意を満たす。

1.(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) x \frac{d}{dx} \delta(x) dx = [\phi(x) x \delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x) + x \phi'(x)) \delta(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx$$

1.(d)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{d}{dx} \theta(x) dx &= [\phi(x) \theta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \theta(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \theta(x) dx \\ &= - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = -[\phi(x)]_0^{\infty} = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x) dx \end{aligned}$$

2.(a).

(1)

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\frac{k}{2a})^2 - \frac{k^2}{4a}} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(2)

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} e^{-ikx} dx = -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{x^2 + a^2} e^{-ikx}, x = -ai\right] = -2\pi i \lim_{x \rightarrow -ai} (x + ai) \frac{1}{x^2 + a^2} e^{-ikx}$$

$$F(k) = \frac{\pi}{a} e^{ak}$$

(3)

$$F_m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} \delta(x) e^{-ikx} dx = \left[\frac{d^{(m-1)}}{dx^{(m-1)}} \delta(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{-ik} F_{m-1}(k) = \frac{1}{ik} F_{m-1}(k)$$

$F_0(k) = 1$ より、

$$F_m(k) = \frac{1}{(ik)^m}$$

2.(b)

2.(a).(3) より自明

3.(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n(x) t^n P_m(x) s^m = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}}$$

これに $\int_{-1}^1 dx$ で積分すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^n s^m \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}} dx$$

ここで、

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{st}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1+t^2}{2t} - x}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^2}{2s} - x}} dx$$

ここで、 $a = \frac{1+t^2}{2t}, b = \frac{1+s^2}{2s}$ として、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) &= \frac{\frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{a-x}} + \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{b-x}}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}} \frac{1}{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}} \\ &= -\frac{1}{2(\sqrt{a-x}\sqrt{b-x})} \end{aligned}$$

$$(\text{与式}) = -\frac{1}{\sqrt{st}} [\ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{st}} \ln \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}} = \frac{1}{\sqrt{st}} \ln \frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}$$

ここで、テイラー展開を考える、

$$\ln(1+x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots, \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots, \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots)$$

$$(\text{与式}) = \frac{1}{\sqrt{st}} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (\sqrt{st})^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} s^n t^n$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 (n \neq m) \\ \frac{2}{2n+1} (n = m) \end{cases}$$

3.(b)

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n$$

y で微分して、

$$\frac{x-y}{(1-2xy+y^2)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) y^{n-1}$$

$$(x-y) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n = (1-2xy+y^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)y^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xP_n(x)y^n - P_n(x)y^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (nP_n(x)y^{n-1} - 2nxP_n(x)y^n + nP_n(x)y^{n+1})$$

y^n で係数比較して、

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \cdots (1)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n$$

x で微分して、

$$\frac{y}{1-2xy+y^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)y^n$$

$$y \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n = (1-2xy+y^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)y^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (P'_n(x)y^n - 2xP'_n(x)y^{n+1} + P'_n(x)y^{n+2})$$

y^n で係数比較して

$$P_{n-1}(x) = P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x)$$

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) \cdots (2)$$

(1) を微分して、

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0$$

ここで、 $n \times (2)$ を引くと、

$$P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + 2nxP'_n(x) = -nP_n(x)$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \cdots (3)$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n-1}(x) \cdots (3)'$$

$$(3) - (2) \quad xP'_n(x)P'_{n-1}(x) = nP_n(x) \cdots (4)$$

$$(3)' - (4)x \quad (1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$