

地球惑星物理学基礎演習 No.5

040348I 桑原將旗

平成 24 年 1 月 9 日

問い 1

(a) 微分形式を用いると、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

より、

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= (u_x v_y - u_y v_x) dx \wedge dy \\ \frac{du \wedge dv}{dx \wedge dy} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad \text{よって、} \quad u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$$

$y = x$ の直線は、 $y = x = t$ とおいて、 $u = t^2 - t^2, v = 2t^2$, よって、 $u = 0 (v > 0)$ の半直線になる。

$x = 1$ の直線は、 $x = 1, y = t$ とおいて、 $u = 1 - t^2, v = 2t$, よって $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$ そのとき、交わる角度は、
 $\frac{\partial u}{\partial v}_{u=0, v=2} = \left(-\frac{1}{2}v\right)_{v=2} = -1$ よって、なす角度は 45° であり、元のなす角度も 45° であるので、角度保存をする。

2.

$w = e^{i\theta}$ とする、 $\exp\left(\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right) = e^{iz \sin \theta}$ であり、両辺に $\frac{1}{2\pi}e^{-in\theta}$ をかけて、 $\int_{-\pi}^{\pi} d\theta$ を積分すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} e^{-in\theta} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} J_m(z) e^{im\theta} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} J_m(z) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(m-n)\theta} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} J_m(z) \frac{1}{2\pi} 2\pi \delta_{mn} = J_n(z) \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{iz \sin \theta} e^{-ni\theta}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \quad e^{i(z \sin \theta - n\theta)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \quad \cos(z \sin \theta - n\theta) + i \sin(z \sin \theta - n\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \quad \cos(z \sin \theta - n\theta) \quad \sin \text{ は奇関数}
\end{aligned}$$

以上より、

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \quad \cos(z \sin \theta - n\theta)$$

(b).

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] &= \exp\left(\frac{z}{2}w\right) \exp\left(-\frac{z}{2w}\right) \\
&= \sum_m \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}w\right)^m \sum_l \frac{1}{l!} \left(-\frac{z}{2w}\right)^l \\
&= \sum_{n,m} \frac{(-1)^l}{m!l!} \frac{z^{m+l}}{2^{m+l}} w^{m-l}
\end{aligned}$$

ここで、 $m-l=n$ とおくと、 $m=l+n$, よって、 $-\infty \leq n \leq \infty$, $-\infty \leq l \leq \infty$ として、

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+n)!l!} \frac{z^{n+2l}}{2^{n+2l}} \right) w^n$ ここで、 $l < 0$ のときは、 $(l+n)! = \Gamma(1+l+n) = \infty$ より、入らない、 l を s にかえて、 $(\Gamma(1+n+s) = (n+s)!)$ として、)

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s z^{n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(1+n+s)}$$

3.(a)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1) \cdots (z+n)} n^z \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots 1}{(z+n)(z+n-1) \cdots (z+1)} \frac{n^z}{z} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{z}{n-1}} \cdots \frac{1}{1 + \frac{z}{1}} \frac{n^z}{z} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{z}{k}} \right) \frac{n^z}{z}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
n^z &= e^{z \log n} = e^{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n))} \\
\Gamma(z) &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)z} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{z}{k}} e^{\frac{z}{k}} \right) \\
&= \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{z}{k}} e^{\frac{z}{k}} \quad (1) \\
\Gamma^{-1}(z) &= z e^{\gamma} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}
\end{aligned}$$

3.(b).

無限乗累の公式より、 $\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2})$

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(z+1) \cdots (z+n+1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z \cdots (z+n)} n^{z+1} \times n \times \frac{z}{z+n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{1 + \frac{z+1}{n}} \frac{n!}{z \cdots (z+n)} n^{z+1} \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(1-z) &= -\frac{1}{z}\Gamma^{-1}(-z) \\ &= -\frac{1}{z} \times (-z)e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{k}) e^{\frac{z}{k}} \\ &= e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{k}) e^{\frac{z}{k}} \\ \Gamma^{-1}(z)\Gamma^{-1}(1-z) &= z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2}) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}\end{aligned}$$

4.

ポイント

1. 積分経路を鞍点を通るように変更する。

2. 鞍点を見つけ、位相を最急降下曲線になるようなものに決定する。

鞍点法で重要なのは、積分経路の端点で、 $Re(e^{\lambda f(z)}) \rightarrow 0$ であることが必要である。

そこで、 $\xi = Re^{i\theta}$ において、 $\exp(\lambda f(z))$ の指数考えると、

$$\lambda f(z) = ix\xi + i\xi^3/3 = -xR \sin \theta x - \frac{R^3}{3} \sin 3\theta + i(xR \cos \theta + \frac{R^3}{3} \cos \theta)$$

よって、 $\sin 3\theta > 0$ のとき、つまり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$, $\frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}$ のとき、 $R \rightarrow \infty$ のとき、 $Re(ix\xi + i\xi^3/3) \rightarrow -\frac{R^3}{3} \sin 3\theta \rightarrow -\infty$ よって、 $e^{ix\xi + i\xi^3/3} \rightarrow 0$ となり、端点で 0 になることがわかる。

4.(a). ($x > 0$) のとき、

$\xi = \sqrt{x}z$ とおくと、

$$\begin{aligned}A_i(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix(\sqrt{x}z + \frac{1}{3x}x\sqrt{x}z^3)) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} \exp(ix\sqrt{x}(z + \frac{1}{3}z^3)) dz \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda f(z)) dz \quad (\text{ただし、}\lambda = x\sqrt{x}, f(z) = i(z + \frac{1}{3}z^3))\end{aligned} \quad (2)$$

次に鞍点を求める為に微分をする。 $f'(z) = i(1 + z^2) = 0$, $f''(z) = 2iz$, よって、 $z = \pm i$ なので、 $z = i$ を選びそれが適する様に積分経路を変更する。

その前に、位相を決めないといけないので、 $f(z)$ を $z = i$ で展開する、 $z - i = re^{i\theta}$ として、

$$f(z) = f(i) + \frac{f''(i)}{2!}(z-i)^2 + \cdots = -\frac{2}{3} - r^2 e^{2i\theta}$$

よって、積分のなかみについて考えると、 $e^{\lambda f(z)} = e^{-\frac{2}{3}\lambda} \exp(-\lambda r^2 e^{2i\theta})$ なので、 $\theta = 0, \pi$ で $r = 0$ で極大となる。

$$e^{\lambda f(z)} = e^{-\frac{2}{3}\lambda} \exp(-\lambda r^2)$$

最急降下曲線になる候補は $Im f(z) = x(\frac{x^3}{3} - y^2 + 1) Const = Im f(i) = 0$ より、 $z = i$ をとおり、そこでの位相が $\theta = 0, \pi$ のものは、 $y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + 1}$ 以上より、積分経路が、 $y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + 1}$ に変更できることを示す。

図のように、 $C_0, C_1, -C_2(y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + 1}), C_3$ を定めると、 $C_0 : z = x, (x : -R \rightarrow R), C_1 : z = R + iy, (y : 0 \rightarrow \sqrt{\frac{R^3}{3} + 1}), C_2 : y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + 1}, (x : -R \rightarrow R), C_3 : z = -R + iy, (y : \sqrt{\frac{R^3}{3} + 1} \rightarrow 0)$

経路内は、正則より、

$$\frac{\sqrt{x}}{2\pi} \left(\int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{-C_2} + \int_{C_3} \right) = 0$$

また、 $y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + 1} \rightarrow \pm \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$ よって、 $R \rightarrow \infty$ において、 C_1, C_3 における経路では、 $\exp(\lambda f(z)) \rightarrow 0$ なので、寄与は 0 になる。

したがって、

$$\frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{y=\sqrt{\frac{x^3}{3}+1}} = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda f(z)) dz$$

よって、積分経路の変更ができた。

ここで、最急降下曲線では、殆ど、鞍点のまわりで、それ以外は積分に余り影響しないので、 $r = 0$ の近傍の微小区間 $-\epsilon \leq r \leq \epsilon$ のみが寄与する。また、 $\frac{dz}{dr} = e^{i\theta} = 1$ (積分経路を考えて、 $\theta = 0$) であり、

$$\begin{aligned} A_i(z) &= \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dr \frac{dz}{dr} \exp(\lambda f(z)) \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2\pi} e^{-\frac{2\lambda}{3}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dr e^{-\lambda r^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2\pi} e^{-\frac{2\lambda}{3}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\epsilon\sqrt{\lambda}}^{\epsilon\sqrt{\lambda}} ds e^{-s^2} \\ &\rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2\pi} e^{-\frac{2\lambda}{3}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

4.(b). ($x < 0$) のとき、

$\xi = \sqrt{-xz}$ とおくと、

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ix(\sqrt{-xz} + \frac{1}{3x}(-x)\sqrt{-xz^3})\right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} \exp\left(i(-x\sqrt{-x})(-z + \frac{1}{3}z^3)\right) dz \\ &= \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda f(z)) dz \quad \left(\text{ただし、}\lambda = (-x\sqrt{-x}) = |x|^{\frac{3}{2}}, f(z) = i(-z + \frac{1}{3}z^3)\right) \quad (3) \end{aligned}$$

次に鞍点を求める為に微分をする。 $f'(z) = i(-1 + z^2) = 0, f''(z) = 2iz$, よって、 $z = \pm 1$ である。その前に、位相を決めないといけないので、 $f(z)$ を $z_0 = \pm 1$ で展開する、 $z - z_0 = re^{i\theta}$ として、

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots = \mp i \frac{2}{3} - r^2 e^{2i\theta \pm i \frac{\pi}{2}}$$

よって、積分のなかみについて考えると、 $e^{\lambda f(z)} = e^{\mp i \frac{2}{3} \lambda} \exp(2i\theta \pm i \frac{\pi}{2})$ なので、 $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ で $r = 0$ で極大となる。

$$e^{\lambda f(z)} = e^{\mp i \frac{2}{3} \lambda} \exp(-\lambda r^2)$$

最急降下曲線になる候補は $Im f(z) = x(\frac{x^3}{3} - y^2 - 1) = Const = Im f(i) = \mp \frac{2}{3}$ より、 $z = \pm 1$ をとおり、そこでの位相が $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ のものは、下のような図 $C_{\pm}$ になる。以上より、積分経路が、 $C_{\pm}$ に変更できることを示す。

図のように、 $C_0, C_1, -C_2(-C_+), C_3, -C_4(-C_-), C_5$ を定めると、経路内は、正則より、

$$\frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} (\int_{C_0} + \int_{C_1} + \int_{-C_2} + \int_{C_3} + \int_{-C_4} + \int_{C_5}) = 0$$

また、よって、 $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ において、 C_1, C_3, C_5 における経路では、 $\exp(\lambda f(z)) \rightarrow 0$ なので、寄与は 0 になる。

したがって、

$$\frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} (\int_{C_+} + \int_{C_-}) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda f(z)) dz$$

よって、積分経路の変更ができた。

つまり、

$$A_i(z) = I_+ + I_- = \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} \int_{C_+} + \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} \int_{C_-}$$

となる。

ここで、最急降下曲線では、殆ど、鞍点のまわりで、それ以外は積分に余り影響しないので、 $r = 0$ の近傍の微小区間 $-\epsilon \leq r \leq \epsilon$ のみが寄与する。また、 $\frac{dz}{dr} = e^{i\theta} = e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$ (積分経路を考えて、 $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$) であり、

$$\begin{aligned} I_+ &= \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dr \frac{dz}{dr} \exp(\lambda f(z)) \\ &= \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} e^{i(-\frac{2\lambda}{3} + \frac{\pi}{4})} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dr e^{-\lambda r^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |x|^{-\frac{1}{4}} \exp(-i(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_- &= \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dr \frac{dz}{dr} \exp(\lambda f(z)) \\ &= \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi} e^{i(\frac{2\lambda}{3} - \frac{\pi}{4})} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dr e^{-\lambda r^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |x|^{-\frac{1}{4}} \exp(i(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4})) \end{aligned}$$

$$A_i(z) = I_+ + I_- = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

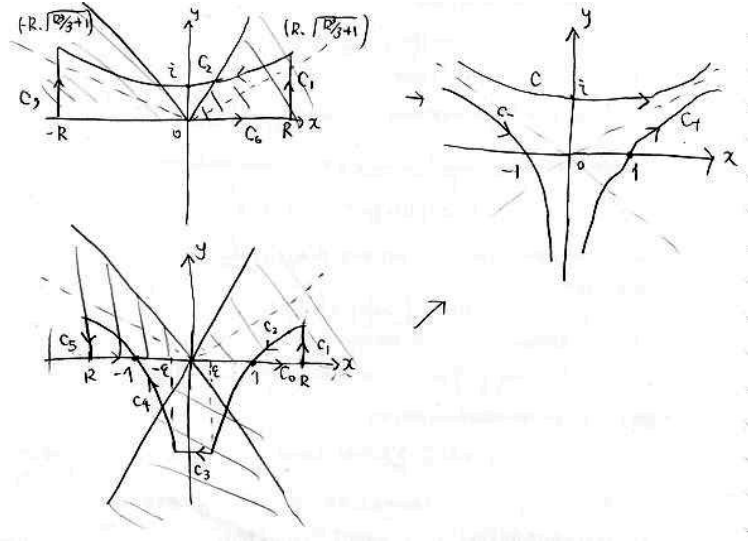


図 1:

5.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

これに、それぞれ、 $\cos nx, \sin nx$ をかけて、 $-\pi$ から π まで積分すると、次の式が出てくる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

よって、 $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} [\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (\text{奇関数なので、})$$

$$|x| = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \cos nx = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

ここで、 $x=0$ とすると、

$$0 = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

5.(b).

フーリエ余弦定理は、 $f(x) = \cos x \quad (0 < x < \pi)$ を偶関数として、 $(-\pi < x < \pi)$ と拡張したものを考える。

$\cos x$ 自体は、偶関数なので、そのまま拡張すればよい、 $f(x)$ が偶関数のとき、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (-\pi < x < \pi), a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$n \neq 1$ のとき、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(1+n)x + \cos(1-n)x dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} [\sin(1+n)x]_0^{\pi} + \frac{1}{1-n} [\sin(1-n)x]_0^{\pi} \right) = 0$$

$n = 1$ のとき、

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x + 1 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_0^{\pi} = 1$$

以上より、 $f(x) = \cos x = \cos x$

フーリエ正弦定理は、 $f(x) = \cos x \quad (0 < x < \pi)$ を奇関数として、 $(-\pi < x < \pi)$ と拡張したものを考える。

$\cos x$ 自体は、偶関数なので、 $f(x) = -\cos x \quad (-\pi < x < 0)$ とすればよい、

$f(x)$ が奇関数のとき、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (-\pi < x < \pi), b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$n \neq 1$ のとき、

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n+1)x + \sin(n-1)x dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{n+1} [\cos(1+n)x]_0^{\pi} + \frac{-1}{n-1} [\cos(n-1)x]_0^{\pi} \right)$$

その中で、 n が偶数のとき、

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{2n}{n^2-1}$$

その中で、 n が奇数のとき、

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{2n}{n^2-1}$$

$n = 1$ のとき、

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = \frac{1}{2\pi} [-\cos 2x]_0^{\pi} = 0$$

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{n^2-1} (-1)^n \sin nx$$