

地球惑星物理学基礎演習 No.4

040348I 桑原將旗

平成 24 年 1 月 5 日

問い 1

コーシーリーマンの関係式より、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial x} r \sin \theta \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial v}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{2}$$

(b)

ここで、コーシーリーマンの関係式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial(R \cos \phi)}{\partial x} &= \frac{\partial(R \sin \phi)}{\partial y}, \frac{\partial(R \cos \phi)}{\partial y} = -\frac{\partial(R \sin \phi)}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial x} \cos \phi - R \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial y} \sin \phi + R \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \cos \phi - R \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial R}{\partial x} \sin \phi - R \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned}$$

変形して、

$$\begin{aligned} \cos \phi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \sin \phi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \right) &= \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \sin \phi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \cos \phi \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \right) &= -\cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

更に変形して

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r} &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial R}{\partial y} \sin \theta \\ &= \frac{R}{r} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} r \cos \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} r \sin \theta \right) = \frac{R}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{R}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial R}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial R}{\partial y} r \cos \theta \right) \\ &= -R \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \sin \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \cos \theta \right) = -R \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} \right) \\ &= -R \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

2

(a) 極は、1位の極が $z=0$ で、3位の極が $z=1$ の2つある。

(i) $z=0$ のとき

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3} = -5$$

(i) $z=1$ のとき

$z=1$ でローラン展開を考える。

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{z^3 + 5}{z(z-1)^3} &= \frac{z^3 + 5}{(z-1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\ &= \left(1 + \frac{3}{(z-1)} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{6}{(z-1)^3} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\ &= \cdots + \frac{1}{z-1} (3-3+6) \cdots \end{aligned}$$

$$\text{Res}[f, z=1] = 6$$

(b) 極は、真性特異点で $z=0$ 。

$z=0$ で、ローラン展開を考える。

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \cdots$$

$$\text{Res}[f, z=0] = -\frac{1}{2}$$

(c)

$\sin z = 0$ を考える、 $\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0, e^{2iz} = 1$ したがって、 $z = n\pi$

極は、 $z = n\pi$ で一位の極

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{(z - n\pi)}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{(z - n\pi)}{\sin z - \sin n\pi} = \frac{1}{\cos n\pi}$$

(d) 極は、 $z = 0$ で真性特異点

$z = 0$ でローラン展開を考える。

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} e^{z + \frac{1}{z}} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + \frac{1}{z})^n}{n!} \\ &= \cdots + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2C_1}{2!} + \frac{4C_2}{4!} + \frac{6C_3}{6!} + \cdots \right) + \cdots \end{aligned} \quad (5)$$

(ここで、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + \frac{1}{z})^n}{n!}$ で定数項を抜き出せばよいので、 n が偶数のものがあてはまる。)

$$\text{Res}[f, z = 0] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nC_n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

3.(a). メリン変換の利用

$(-z)^{-a} = e^{(-a)\log(-z)}$ は多価関数、である。

$\log(-z)$ の主値を考えて、 $\text{Log}(-z) = \log|z| + i\arg(-z)$ ($-\pi < \arg(-z) \leq \pi$) とすると、 $(-z)^{-a} = |z|^{-a} e^{i(-a)\arg(-z)}$ は一価関数となる。

このとき、 $-z$ の負の実数、つまり、 z の正の実数で不連続になる。

なぜなら、 $\theta = \arg(z)$ のとき、 $\arg(-z) = \theta - \pi$ とすれば、 $(-z)^{-a} = |z|^{-a} e^{i(-a)(\theta - \pi)}$ ($0 < \theta \leq 2\pi$)
正の実軸の上側 ($\theta \rightarrow 0$) では、 $(-z)^{-a} = |z|^{-a} e^{-i(-a)\pi}$ 、また、下側 ($\theta \rightarrow 2\pi$) では、 $(-z)^{-a} = |z|^{-a} e^{i(-a)\pi}$ 、
ここで、 $-a$ は整数ではないので、 $e^{-i(-a)\pi} \neq e^{i(-a)\pi}$ であり、 $(-z)^{-a}$ は不連続になる。

以上不連続の理由。

$\oint_C dz (-z)^{-a} f(z)$ として、この $(-z)^{-a}$ は上にのべた主値とする。 C は、 $C_R =$ 原点を中心とする。半径

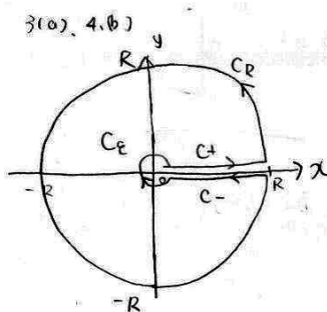


図 1:

$R \rightarrow \infty$ の正方向の円周。 C_ϵ = 原点を中心とする。半径 $\epsilon \rightarrow +0$ の負方向の円周。 C_+ = 実軸のすぐ上の線分 ($x: \epsilon \rightarrow R$) C_- = 実軸のすぐ下の線分 ($x: R \rightarrow \epsilon$) ただし、 $C_\pm$ はかぎりなく近くであるとする。

C_R では、 $z = Re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} (-z)^{-a} &= |z|^{-a} e^{-ai(\theta - \pi)} = R^{-a} e^{-ia(\theta - \pi)} \\ |I_R| &\leq R \int_0^{2\pi} d\theta |(-z)^{-a} f(z)| = \int_0^{2\pi} R^{1-a} |f(Re^{i\theta})| \end{aligned}$$

ここで、 $z \rightarrow \infty$ のとき、 $z^{1-a}f(z) \rightarrow 0$ であるので、 $I_R \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$)

同様に、

$$|I_\epsilon| \leq \int_0^{2\pi} \epsilon^{1-a} |f(\epsilon e^{i\theta})| d\theta \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow +0)$$

C_+ 上では、 $\theta = 0$ より、 $(-z)^{-a} = x^{-a} e^{i\pi a}$

$$I_+ = \int_\epsilon^R x^{-a} e^{i\pi a} f(x) dx \rightarrow -e^{i\pi(1-a)} \int_0^\infty dx x^{-a} f(x)$$

C_- 上では、 $\theta = 2\pi$ より、 $(-z)^{-a} = x^{-a} e^{-i\pi a}$

$$I_- = \int_\epsilon^R x^{-a} e^{-i\pi a} f(x) dx \rightarrow e^{i\pi(1-a)} \int_0^\infty dx x^{-a} f(x)$$

よって、

$$\oint_C dz (-z)^{-a} f(z) = I_R + I_\epsilon + I_+ + I_- \rightarrow (e^{i\pi(1-a)} - e^{-i\pi(1-a)}) \int_0^\infty dx x^{1-a} f(x)$$

$$\int_0^\infty dx x^{-a} f(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-a))} \sum_k \text{Res}((-z)^{-a} f(z), a_k) = \frac{\pi 1^{-a}}{\sin(\pi - \pi a)} = \frac{\pi 1^{-a}}{\sin(\pi a)}$$

3.(b).

$\oint_C \frac{e^{iaz}}{\sinh \pi z} dz$ を考えて、次のような経路 C を考える。

ここで、 $\sinh \pi z = 0 \rightarrow e^{2\pi z} = 1 \rightarrow z = \pm ni$ より、特異点は、 $z = \pm ni$

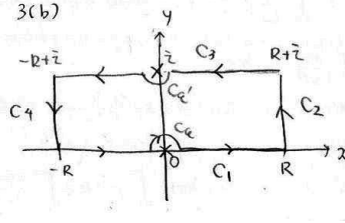


図 2:

C_1 は、 $z = x (x: -R \rightarrow \epsilon, \epsilon \rightarrow R)$

$$\begin{aligned} I_1 &= P \int_{-R}^R \frac{e^{iax}}{\sinh \pi x} dx = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{iax}}{\sinh \pi x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{iax}}{\sinh \pi x} dx \\ &= - \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-iax}}{\sinh \pi x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{iax}}{\sinh \pi x} dx \\ &= 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx \rightarrow 2i \int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx \quad (\epsilon \rightarrow +0, R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

C_3 は、 $z = x + i (x: -R \rightarrow \epsilon, \epsilon \rightarrow R)$

$$\begin{aligned} I_3 &= P \int_R^{-R} \frac{e^{ia(x+i)}}{\sinh \pi(x+i)} dx \\ &= e^{-a} P \int_{-R}^R \frac{e^{iax}}{\sinh \pi x} dx \\ &= e^{-a} I_1 = 2ie^{-a} \int_{\epsilon}^R \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx \rightarrow 2i \int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx \quad (\epsilon \rightarrow +0, R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ここで、 $\sinh \pi(x+i) = \frac{e^{\pi(x+i)} - e^{-\pi(x+i)}}{2} = \frac{-e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{2} = -\sinh \pi x$
 $e^{ia(x+i)} = e^{-a} \cdot e^{iax}$ を使った。

C_3 上は、 $z = R + ix$ ($x: 0 \rightarrow 1$) なので、

$$|I_3| = \left| i \int_0^1 dx \frac{e^{ia(R+ix)}}{\sinh \pi(R+ix)} \right| \leq \int_0^1 dx \left| \frac{e^{ia(R+ix)}}{\sinh \pi(R+ix)} \right|$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\sinh \pi(R+ix)|} &= \frac{2}{|e^{\pi(R+ix)} - e^{-\pi(R+ix)}|} = \frac{2}{|e^{\pi(R+ix)}| |1 - e^{-2\pi(R+ix)}|} \\ &= \frac{2}{e^{\pi R}} \times \frac{1}{|1 - e^{-2\pi R} \times e^{-2\pi ix}|} \end{aligned}$$

よって、

$$|I_3| < \frac{2}{e^{\pi R}} \int_0^1 dx \frac{e^{-ax}}{|1 - e^{-2\pi R} \times e^{-2\pi ix}|} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

同様に $|I_4| \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$)

次に、 C_ϵ 上は、 $z = \epsilon e^{i\theta}$ ($\theta: \pi \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \int_\pi^0 i\epsilon e^{i\theta} d\theta \frac{e^{ia\epsilon e^{i\theta}}}{\sinh(\pi\epsilon e^{i\theta})} = i \int_\pi^0 \frac{\epsilon e^{i\theta} - 0}{\sinh(\pi\epsilon e^{i\theta}) - \sinh(\pi 0)} e^{ia\epsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &\rightarrow i \int_\pi^0 \frac{1}{\pi \cosh 0} \times 1 d\theta = -i \quad (\epsilon \rightarrow +0) \end{aligned}$$

次に、 C'_ϵ 上は、 $z = i + \epsilon e^{i\theta}$ ($\theta: 0 \rightarrow -\pi$)

$$\begin{aligned} I'_\epsilon &= \int_0^{-\pi} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \frac{e^{ia(i+\epsilon e^{i\theta})}}{\sinh(\pi(i+\epsilon e^{i\theta}))} = i \int_{-\pi}^0 \frac{\epsilon e^{i\theta} - 0}{\sinh(\pi\epsilon e^{i\theta}) - \sinh(\pi 0)} e^{ia(i+\epsilon e^{i\theta})} d\theta \\ &\rightarrow i \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\pi} e^{-a} d\theta = e^{-a} i \quad (\epsilon \rightarrow +0) \end{aligned}$$

以上から経路内は正則なので、

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{e^{iaz}}{\sinh \pi z} dz &= 0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_\epsilon + I'_\epsilon \\ 0 &= 2i(1 + e^{-a}) \int_0^\pi \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx + i(e^{-a} - 1) \\ &\quad \int_0^\pi \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx = \frac{1 - e^{-a}}{2(1 + e^{-a})} \end{aligned}$$

3.(c).

$x^2 = y$ とおくと、 $2xdx = dy$ より、 $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{4}$$

4.(a)

$a_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ とおくと、 $1 + z^3 = 0$ の解は、 $z = a_0, a_0^3, a_0^5$ となる。下の図のように、 $\oint_c \frac{dz}{1z^3}$ と経路を置くと、

$$I_1 = \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} \rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} \quad (R \rightarrow \infty)$$

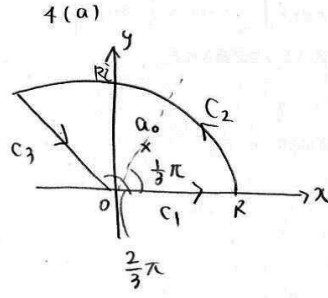


図 3:

C_2 上では、 $z = Re^{i\theta}$ ($\theta : 0 \rightarrow \frac{2}{3}\pi$)

$$I_2 = iR \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{d\theta}{R^3 e^{i3\theta} + 1}$$

$$|I_2| \leq R \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{d\theta}{R^3 - 1} = \frac{R}{R^3 - 1} \frac{2}{3}\pi \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

C_3 上では、 $z = a_0^2 x$ ($x : R \rightarrow 0$) より、

$$I_3 = a_0^2 \int_R^0 \frac{dx}{a_0^6 x^3 + 1} = -a_0^2 \int_0^R \frac{dx}{x^3 + 1} \rightarrow -a_0^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} \quad (R \rightarrow \infty)$$

C 上では、 $z = a_0$ で特異点を持つので、

$$\oint_C \frac{dz}{z^3 + 1} 2\pi i \times \frac{1}{3a_0^{3-1}} = -\frac{2\pi i a_0}{3}$$

以上から、 $-\frac{2\pi i a_0}{3} = (1 - a_0^2) \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3} = -\frac{2\pi i a_0}{3} \times \frac{1}{1 - a_0^2} = \frac{\pi}{3} \frac{2i}{a_0 - a_0^{-1}} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi$$

4.(b) $\log$ は多価関数なので、メリン変換を利用する。

$f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ において、 $z = |z|e^{i\theta}$ ($0 < \theta \leq 2\pi$) ここで、主値として、 $\text{Log}(-z) = \log|z| + i(\theta - \pi)$ と

する。(一価関数) として、 $\oint_C dz f(z) \text{Log}(-z)$ として、 C の経路を考えると、(経路は、3(a))

$C_\pm$ 上では、 $\text{Log}(-z) = \log x \mp i\pi$ より、

$$I_+ = \int_{C_+} dz f(z) \text{Log}(-z) = \int_\epsilon^R dx f(x) (\log x - i\pi)$$

$$I_- = \int_R^\epsilon dx f(x) (\log x + i\pi)$$

$$I_+ + I_- = -2\pi i \int_\epsilon^R dx f(x) \rightarrow -2\pi i \int_0^\infty dx f(x) \quad (\epsilon \rightarrow +0, R \rightarrow \infty)$$

C_R 上では、 $z = Re^{i\theta}$, $\text{Log}(-z) = \log R + i(\theta - \pi)$

$$|I_R| = |R \int_0^{2\pi} d\theta f(Re^{i\theta}) (\text{Log} R + i(\theta - \pi))| \leq R(\log R + \pi) \int_0^{2\pi} d\theta |f(Re^{i\theta})| \rightarrow 0$$

なぜなら、 $z^2 f(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty)$ より、 $R(\log R + \pi) |f(Re^{i\theta})| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$
 同様に、 C_ϵ 上では、

$$|I_\epsilon| \leq \epsilon(\log \epsilon + \pi) \int_0^{2\pi} d\theta |f(\epsilon e^{i\theta})| \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow +0)$$

また経路全体では、 $R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0$ では、 $\oint_c$ は全ての極を内部に含むので、

$$\oint_c dz f(z) \text{Log}(-z) = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f(z) \text{Log}(-z), a_k) = -2\pi i \int_0^\infty dx f(x)$$

以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx f(x) &= - \sum_k \text{Res}(f(z) \text{Log}(-z), a_k) = - \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{1}{3}\pi}, -1, e^{i\frac{5}{3}\pi}} \frac{\text{Log}(-z)}{3z^2} \\ &= -i \left(\frac{-\frac{2}{3}\pi}{3e^{i\frac{2}{3}\pi}} + 0 + \frac{\frac{2}{3}\pi}{3e^{i\frac{10}{3}\pi}} \right) = \frac{\pi}{3} \frac{2i}{a_0 - a_0^{-1}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

5.

ポイントは、 $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ と自然数表示にすることと、
 積分経路をどう決めるかです。

5.(a)

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - \sigma^2} dx \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{より、} \\ I(\sigma) &= I_1(\sigma) + I_2(\sigma) \\ I_1(\sigma) &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{ix}}{x^2 - \sigma^2} \\ I_2(\sigma) &= -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-ix}}{x^2 - \sigma^2} \end{aligned}$$

(i) $I_1(\sigma)$ について、 $I_{C_1} = I_o + I_R$

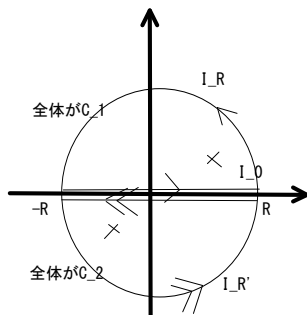


図 4:

留数定理より、

$$I_{C_1} = \frac{1}{2i} \int_{C_1} dz \frac{ze^{iz}}{(z + \sigma + i\epsilon)(z - \sigma - i\epsilon)} = 2\pi i \frac{1}{2i} \frac{e^{i(\sigma+i\epsilon)}}{2} = \frac{\pi}{2} e^{i(\sigma+i\epsilon)} \rightarrow \frac{\pi}{2} e^{i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

$$I_0 = I_1(\sigma + i\epsilon) \rightarrow I_1(\sigma) (\epsilon \rightarrow +0)$$

$z = Re^{i\theta}$ として、

$$I_R = \frac{1}{2i} \int_0^\pi d\theta iRe^{i\theta} \frac{Re^{i\theta} e^{iRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta} + \sigma + i\epsilon)(Re^{i\theta} - \sigma - i\epsilon)}$$

$$|I_R| \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \left| \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{1 - \left(\frac{\sigma+i\epsilon}{Re^{i\theta}}\right)^2} \right| < \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta |e^{iRe^{i\theta}}| = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta e^{-R \sin \theta}$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-R \frac{2}{\pi} \theta} = -\frac{\pi}{2R} [e^{-R \frac{2}{\pi} \theta}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$$

(6)

から、 $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ を使っている。

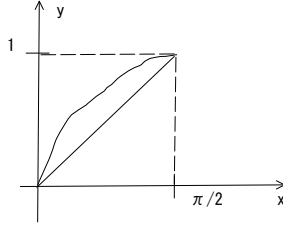


図 5:

更に、

$$|e^{iRe^{i\theta}}| = |e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{iR \cos \theta}| |e^{-R \sin \theta}| = e^{-R \sin \theta}$$

を用いた、以上より、 $I_1(\sigma) = \frac{\pi}{2} e^{i\sigma}$

(ii) $I_2(\sigma)$ について、 $I_{C_2} = -I_0 + I_{R'}$

留数定理より、

$$I_{C_2} = -\frac{1}{2i} \int_{C_2} dz \frac{ze^{-iz}}{(z + \sigma + i\epsilon)(z - \sigma - i\epsilon)} = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2i}\right) \times \frac{e^{i(\sigma+i\epsilon)}}{2} = -\frac{\pi}{2} e^{i(\sigma+i\epsilon)} \rightarrow -\frac{\pi}{2} e^{i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

$$I_0 = I_2(\sigma + i\epsilon) \rightarrow I_2(\sigma) (\epsilon \rightarrow +0)$$

$z = Re^{i\theta}$ として、

$$I_{R'} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^{2\pi} d\theta iRe^{i\theta} \frac{Re^{i\theta} e^{-iRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta} + \sigma + i\epsilon)(Re^{i\theta} - \sigma - i\epsilon)}$$

$$\begin{aligned}
|I_{R'}| &\leq \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \left| \frac{e^{-iRe^{i\theta}}}{1 - \left(\frac{\sigma+i\epsilon}{Re^{i\theta}}\right)^2} \right| < \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta |e^{-iRe^{i\theta}}| < \theta = 2\pi - \theta' > \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 -d\theta' |e^{-iRe^{i(2\pi-\theta')}}| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta' |e^{-iRe^{-i\theta'}}| = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta' e^{-R \sin \theta} \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

以上より、 $I_2(\sigma) = \frac{\pi}{2} e^{i\sigma}$ よって、(i)(ii) 合わせて、

$$I(\sigma) = I_1(\sigma) + I_2(\sigma) = \pi e^{i\sigma}$$

5.(b)

(a) のときも同様の記号を用いて、

(i) $I_1(\sigma)$ について、 $I_{C_1} = I_o + I_R$

I_o と I_R は同じ議論でできる。

留数定理より、

$$I_{C_1} = \frac{1}{2i} \int_{C_1} dz \frac{ze^{iz}}{(z + \sigma - i\epsilon)(z - \sigma + i\epsilon)} = 2\pi i \frac{1}{2i} \frac{e^{i(-\sigma+i\epsilon)}}{2} = \frac{\pi}{2} e^{i(-\sigma+i\epsilon)} \rightarrow \frac{\pi}{2} e^{-i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

よって、 $I_1(\sigma) = \frac{\pi}{2} e^{-i\sigma}$

(i) $I_1(\sigma)$ について、 $I_{C_2} = -I_o + I_{R'}$

I_o と $I_{R'}$ は同じ議論でできる。

留数定理より、

$$I_{C_2} = -\frac{1}{2i} \int_{C_2} dz \frac{ze^{-iz}}{(z + \sigma - i\epsilon)(z - \sigma + i\epsilon)} = -2\pi i \frac{1}{2i} \frac{e^{i(-\sigma+i\epsilon)}}{2} = -\frac{\pi}{2} e^{i(-\sigma+i\epsilon)} \rightarrow -\frac{\pi}{2} e^{-i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

よって、 $I_2(\sigma) = \frac{\pi}{2} e^{-i\sigma}$

よって、(i)(ii) 合わせて、

$$I(\sigma) = I_1(\sigma) + I_2(\sigma) = \pi e^{-i\sigma}$$

5.(c).

積分経路を、中心を原点として、半径 R の上部円で反時計まわりの経路を I_R , 下部円で反時計回りの経路を $I_{R'}$ とする。また、中心を、 $z = \sigma$ として、半径 ϵ の上部円で反時計まわりの経路を I_{ϵ_1} , 下部円で反時計回りの経路を I_{ϵ_3} とする。中心を、 $z = -\sigma$ として、半径 ϵ の上部円で反時計まわりの経路を I_{ϵ_2} , 下部円で反時計回りの経路を I_{ϵ_4} とする。

(i) $I_1(\sigma)$ について、(上部を反時計回りでつなげると)

$$\frac{1}{2i} \int_C dz \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2} = P_{I_1} - I_{\epsilon_1} - I_{\epsilon_2} + I_R$$

ここで、(a) より、 $I_R \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$, 経路内は正則より、 $\frac{1}{2i} \int_C dz \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2} = 0$

$$P_{I_1} = I_{\epsilon_1} + I_{\epsilon_2} \cdots (1)$$

(i) $I_2(\sigma)$ について、(下部を反時計回りでつなげると)

$$-\frac{1}{2i} \int_C dz \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2} = -P_{I_2} - I_{\epsilon_3} - I_{\epsilon_4} + I_{R'}$$

ここで、(a) より、 $I_{R'} \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$, 経路内は正則より、 $-\frac{1}{2i} \int_C dz \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2} = 0$

$$P_{I_2} = -I_{\epsilon_3} - I_{\epsilon_4} \cdots (2)$$

(1)(2) より、

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = I_{\epsilon_1} + I_{\epsilon_2} - I_{\epsilon_3} - I_{\epsilon_4}$$

$z = \sigma + \epsilon e^{i\theta}$ と置いて、

$$I_{\epsilon_1} = \frac{1}{2i} \int_0^\pi d\theta i \epsilon e^{i\theta} \frac{(\sigma + \epsilon e^{i\theta}) e^{i(\sigma + \epsilon e^{i\theta})}}{(2\sigma + \epsilon e^{i\theta}) \epsilon e^{i\theta}} \rightarrow \frac{1}{4} \pi e^{i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

$z = -\sigma + \epsilon e^{i\theta}$ と置いて、

$$I_{\epsilon_2} = \frac{1}{2i} \int_0^\pi d\theta i \epsilon e^{i\theta} \frac{(-\sigma + \epsilon e^{i\theta}) e^{i(-\sigma + \epsilon e^{i\theta})}}{(-2\sigma + \epsilon e^{i\theta}) \epsilon e^{i\theta}} \rightarrow \frac{1}{4} \pi e^{-i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

$z = \sigma + \epsilon e^{i\theta}$ と置いて、

$$I_{\epsilon_3} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^{2\pi} d\theta i \epsilon e^{i\theta} \frac{(\sigma + \epsilon e^{i\theta}) e^{-i(\sigma + \epsilon e^{i\theta})}}{(2\sigma + \epsilon e^{i\theta}) \epsilon e^{i\theta}} \rightarrow -\frac{1}{4} \pi e^{-i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

$z = -\sigma + \epsilon e^{i\theta}$ と置いて、

$$I_{\epsilon_4} = -\frac{1}{2i} \int_\pi^{2\pi} d\theta i \epsilon e^{i\theta} \frac{(-\sigma + \epsilon e^{i\theta}) e^{-i(-\sigma + \epsilon e^{i\theta})}}{(-2\sigma + \epsilon e^{i\theta}) \epsilon e^{i\theta}} \rightarrow -\frac{1}{4} \pi e^{i\sigma} (\epsilon \rightarrow +0)$$

以上から、

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \pi (e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}) = \pi \cos \sigma$$

ここで、(a) と (b) の相加平均が (c) になっている。

6.(a)

$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}}$ は $z = t$ を除く C 上全てで正則。

留数定理より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}} &= \text{Res} \left[\frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}}, z = t \right] \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \Big|_{z=t} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = 2^n P_n(t) \\ P_n(t) &= \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

6.(b).

(i) $t \neq \pm 1$ のとき、

(a) において、積分路 C を $C: |z - t| = |r| \rightarrow z = t + re^{i\theta} (0 \leq \theta < 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(t^2 - 1 + 2tre^{i\theta} + r^2e^{2i\theta})^n}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \frac{(t^2 - 1 + 2tre^{i\theta} + r^2e^{2i\theta})^n}{r^n e^{i(n)\theta}} d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(t^2 - 1)e^{-i\theta} + 2tr + r^2e^{i\theta}}{r} \right\}^n d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{t^2 - 1}{r} + r \right) \cos \theta + 2t + i \left(r - \frac{t^2 - 1}{r} \right) \sin \theta \right\}^n d\theta \\
&\quad r = \sqrt{t^2 - 1} \text{ として、} \\
&= i \int_0^{2\pi} (2\sqrt{t^2 - 1} \cos \theta + 2t)^n d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n(t) &= \frac{1}{2^n 2\pi i} i \int_0^{2\pi} (2\sqrt{t^2 - 1} \cos \theta + 2t)^n d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sqrt{t^2 - 1} \cos \theta + t)^n d\theta
\end{aligned}$$

(ii) $t = 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
P_n(1) &= \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - 1)^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_C \frac{(z + 1)^n}{(z - 1)} dz \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{(z + 1)^n}{(z - 1)}, z = 1 \right] \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi i} 2\pi i 2^n = 1
\end{aligned} \tag{7}$$

(iii) $t = -1$ のとき、

$$\begin{aligned}
P_n(-1) &= \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z + 1)^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_C \frac{(z - 1)^n}{(z + 1)} dz \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{(z - 1)^n}{(z + 1)}, z = -1 \right] \\
&= \frac{1}{2^n 2\pi i} 2\pi i (-2)^n = (-1)^n
\end{aligned} \tag{8}$$

以上より、題意を満たす。