

地球惑星物理学基礎演習 No.3

040348I 桑原將旗

平成 23 年 12 月 6 日

問い 1

[ポイント]

本質的には、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ (収束半径は } |r| < 1 \text{)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

を比較して、収束するかどうかを決めるということである。

(a)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{r}$ なので、ある $\epsilon > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、 $n \geq N$ なら、 $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| - \frac{1}{r} < \frac{\epsilon}{|z|}$,
ここで、両辺に $|z|$ を加えると、 $\left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| - \frac{|z|}{r} < \epsilon$ となる。

ここで、 $|z| < r$ のとき、 $\left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| < \frac{|z|}{r} + \epsilon$ ここで、 $0 < \epsilon < 1 - \frac{|z|}{r}$ とおくと、 $\frac{|z|}{r} + \epsilon = \lambda < 1$ と置くことができる、 $\left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| < \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n}, \left| \frac{c_n z^n}{\lambda^n} \right| < \frac{|c_{n-1} z^{n-1}|}{\lambda^{n-1}} < \dots < \frac{|c_N z^N|}{\lambda^N} = a(Con\text{st})$
 $|c_n z^n| < a \lambda^n, |\lambda| < 1$ より $\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n$ 収束するので、 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する。

ここで、 $|z| > r$ のとき、同様にして、 $|c_n z^n| > 1$ となることが証明できる。 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が収束すると仮定すると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z^n = 0$ となる必要があり、矛盾、したがって発散する。
以上から、 $R = r$ となる。

(b)

$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = l$ なので、ある $\epsilon > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、 $n \geq N$ なら、 $||c_n|^{\frac{1}{n}} - l| < \frac{\epsilon}{|z|}$,
ここで、両辺に $|z|$ を加えると、 $||c_n z^n|^{\frac{1}{n}} - l|z|| < \epsilon$
ここで、 $|z| < \frac{1}{l}$ のとき、 $|c_n z^n|^{\frac{1}{n}} < l|z| + \epsilon$ ここで、 $0 < \epsilon < 1 - l|z|$ とおくと、 $l|z| + \epsilon = \lambda < 1$ と置くことができる、

$|c_n z^n| < (l|z| + \epsilon)^n < \lambda^n, |\lambda| < 1$ より $\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n$ 収束するので、 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する。

ここで、 $|z| > \frac{1}{l}$ のとき、同様にして、 $|c_n z^n| > 1$ となることが証明できる。 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が収束すると仮定すると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z^n = 0$ となる必要があり、矛盾、したがって発散する。
以上から、 $R = \frac{1}{l}$ となる。

(c)

1.(a) より、

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}}{(-1)^{n+2} \frac{1}{n+1}} \right| = \left| 1 + \frac{1}{n} \right| \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$$

よって収束半径は、1

2

(a)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

なので、収束条件は、 $|-x^2| < 1$ つまり、 $|x| < 1$ よって収束半径は、1

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n dx$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-x^2)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

(b)

収束条件としては、

$$\left| \frac{(n+1)^2 z^{n+1}}{n^2 z^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 |z| \rightarrow |z| < 1 (n \rightarrow \infty)$$

よって収束半径は $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^{\frac{2}{n}} z)^n = \frac{1}{1 - n^{\frac{2}{n}} z}$$

b)

収束条件としては、

$$\left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = (n+1) |z| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

よって収束半径は $|z| = 0$

3.

$w = f(z)$ と置く、原点を中心とする円を C とする。今 z_1 を C 内の点とし、また $w_1 = f(z_1)$ として、

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z f'(z) dz}{f(z) - w_1}$$

とおくと、これは、 C 内で、 $z = z_1$ において、1 次の極を有するのみなので、 I は $z = z_1$ における留数に等しい。(これは逆関数のが定義されているので、一対一対応から、 $f(z) = w_1$ となる z は $z = z_1$ のみである

ことから保証される。) したがって、

$$I = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z(z - z_1)f'(z)}{f(z) - w_1} = z_1$$

ここで、 $\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)}{f(z) - w_1} \times f'(z) = \frac{f'(z)}{f'(z)} = 1$ はわかるだろう。

また、 I において、

$$\frac{zf'(z)}{f(z) - w_1} = \frac{zf'(z)}{f(z)} \frac{1}{1 - \frac{w_1}{f(z)}} = \frac{zf'(z)}{f(z)} \left\{ 1 + \frac{w_1}{f(z)} + \frac{w_2}{f(z)^2} + \frac{w_3}{f(z)^3} + \dots \right\}$$

となり、これが一様収束性を用いて、項別積分をすれば、 I すなわち z_1 が w_1 のべき級数に展開される、

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

とすると、

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{zf'(z)dz}{f(z)^{n+1}}$$

ここで、

$$\frac{d}{dz} \frac{z}{f(z)^n} = \frac{1}{f(z)^2} - \frac{nzf'(z)}{f(z)^{n+1}}$$

より

$$nc_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{f(z)^n}$$

これは、 $z = 0$ における、 $f(z)^{-n}$ の留数である。したがって、

$$c_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n \right]_{z=0}$$

$$c_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z}{ze^{az}} \right)^n \right]_{z=0} = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{-anz} \right]_{z=0} = \frac{1}{n!} (-an)^{n-1} [e^{-anz}]_{z=0} = \frac{1}{n!} (-an)^{n-1}$$

テイラー展開は

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-an)^{n-1} w^n$$

$$\text{収束条件は、} \left| \frac{\frac{1}{n!} (-an)^{n-1}}{\left(\frac{1}{(n+1)!} (-a(n+1))^n \right)} \right| = \frac{1}{a(1 + \frac{1}{n})^{n-1}} \rightarrow \frac{1}{ae} (n \rightarrow \infty) \quad |z| < \frac{1}{ae}$$

4(a)

$f(z)$ のローラン展開は、

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n a_n$$

数学的帰納法でこれを示す。

$$\frac{d^k}{dz^k} (z-a)^m f(z) = a_{-m+k} + \dots + \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!} (z-a)^{m-1-k} a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!} (z-a)^{n+m-k} a_n$$

(i) $K = 1$ のとき、

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + (z-a)a_{-m+1} + \cdots + (z-a)^{m-1}a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{n+m}a_n$$

$$\frac{d}{dz}(z-a)^m f(z) = 0 + a_{-m+1} + \cdots + (m-1)(z-a)^{m-2}a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(z-a)^{n+m-1}a_n$$

これは満たす。

(ii) $k(\geq 1)$ のとき成り立つとすると、

$$\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d^k}{dz^k} (z-a)^m f(z) \right) = a_{-m+k+1} + \cdots + \frac{(m-1)!}{(m-1-k-1)!} (z-a)^{m-1-k-1}a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n+m-k-1)!} (z-a)^{n+m-k-1}a_n$$

となり、 $k+1$ のときもなりたつ。

ここで、

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) = (m-1)!a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n+1)!} (z-a)^{n+1}a_n$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) = a_{-1} = \text{Res}[f, a]$$

(b)

$$z = e^{i\theta} \text{ とおくと、 } \cos 2\theta = \frac{1}{2}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}), \cos 3\theta = \frac{1}{2}(e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}) = \frac{1}{2}(z^3 + z^{-3})$$

$$d\theta = \frac{1}{iz} dz$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2p \cos 2\theta + p^2} d\theta = \oint_C \frac{\left\{ \frac{1}{2}(z^3 + z^{-3}) \right\}^2}{1 - 2p \times \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}) + p^2} \frac{1}{iz} dz \\ &= \frac{1}{4i} \oint_C \frac{(z^6 + 1)^2}{z^7 - p(z^9 + z^5) + p^2 z^7} dz = -\frac{1}{4i} \oint_C \frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(pz^4 - (1 + p^2)z^2 + p)} dz \\ &= -\frac{1}{4i} \oint_C \frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(\sqrt{p}z - 1)(\sqrt{p}z + 1)(z - \sqrt{p})(z + \sqrt{p})} dz \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、考えている C の経路は単位円なので、極は $z = 0, \pm\sqrt{p}$ である。

$$\text{Res}[f, \sqrt{p}] = \lim_{z \rightarrow \sqrt{p}} (z - \sqrt{p}) \frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(\sqrt{p}z - 1)(\sqrt{p}z + 1)(z - \sqrt{p})(z + \sqrt{p})} = \frac{(p^3 + 1)^2}{2p^3(p-1)(p+1)}$$

$$\text{Res}[f, -\sqrt{p}] = \lim_{z \rightarrow -\sqrt{p}} (z + \sqrt{p}) \frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(\sqrt{p}z - 1)(\sqrt{p}z + 1)(z - \sqrt{p})(z + \sqrt{p})} = \frac{(p^3 + 1)^2}{2p^3(p-1)(p+1)}$$

ここで、 $z = 0$ でローラン展開すると、

$$\frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(pz^4 - (1 + p^2)z^2 + p)} = \frac{1}{z^5} \left(\frac{1}{p} z^8 + \left(\frac{1}{p^2} + 1 \right) z^6 + \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} + p \right) z^4 + \cdots \right)$$

よって、留数は

$$\text{Res}[f, -0] = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} + p$$

したがって答えは、

$$-\frac{1}{4i} \times 2\pi i (2 \times \frac{(p^3+1)^2}{2p^3(p-1)(p+1)} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} + p) = \frac{1-p+p^2}{1-p} \pi$$

5.

$z > 0$ のとき

$$\frac{1}{2\pi i} (1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^{-\alpha}(\xi - z)}$$

ξ が複素数のとき、 $\xi^{-\alpha} = e^{-\alpha \log \xi}$ より、多価関数であり、そのブランチカットは原点から伸びる任意の半直線である。

ただし、 $\xi = re^{i\theta}$ のとき、 $\xi^{-\alpha} = r^{-\alpha} e^{-i\alpha\theta}$ となるようなリーマン面上とする。

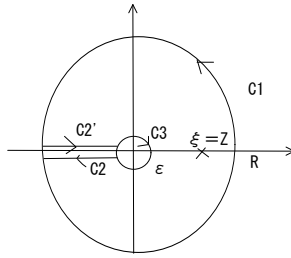


図 1:

C_1 は $|\xi| = R$ の一部、 C_2, C_2' はそれぞれ $\Im \xi = -\delta, \delta$ の直線の一部、 C_3 は $|\xi| = \delta$ の一部とする。
 $\delta \rightarrow +0$ とすると、 C_1, C_3 はそれぞれ半径 R, ϵ の完全な円になるので、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{\xi^\alpha(\xi - z)} d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(Re^{i\theta} - z)} d\theta \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon^\alpha e^{i\alpha\theta}(\epsilon e^{i\theta} - z)} d\theta + \int_{C_2'} + \int_{C_2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left| \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(Re^{i\theta} - z)} \right| = \left| \frac{ie^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(e^{i\theta} - \frac{z}{R})} \right| \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$$

$$\left| \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon^\alpha e^{i\alpha\theta}(\epsilon e^{i\theta} - z)} \right| = \left| \frac{i\epsilon^{1-\alpha} e^{i\theta}}{e^{i\alpha\theta}(\epsilon e^{i\theta} - z)} \right| \rightarrow 0 (\epsilon \rightarrow 0)$$

C_2' 上で、 $\xi = re^{i\pi}$ 、 C_2 上で $\xi = re^{-i\pi}$ と置けるので、

$$\int_{-\infty}^0 \frac{-dr}{r^\alpha e^{i\alpha\pi}(-r - z)} + \int_0^\infty \frac{-dr}{r^\alpha e^{-i\alpha\pi}(-r - z)}$$

$-r = x$ とすると

$$-\frac{e^{-i\alpha\pi}}{(-1)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(x - z)} dx + \frac{e^{i\alpha\pi}}{(-1)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(x - z)} dx$$

$(-1)^\alpha = (e^{i\pi})^\alpha$ なので、

$$\frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha}} \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(x-z)} dx = (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(x-z)} dx$$

一方、留数定理より、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint_C \frac{1}{\xi^\alpha(\xi-z)} d\xi = 2\pi i \left\{ \lim_{\xi \rightarrow z} (\xi-z) \frac{1}{\xi^\alpha(\xi-z)} \right\} = 2\pi i z^{-\alpha}$$

よって解析接続ができた。

6.

$F(z) = R(z)\pi \cot \pi z$ とすると、 $F(z)$ の極は、 $R(z)$ の極、 η_k と $\cot \pi z$ の極からなる。

$\cot \pi z$ 極の求め方、 $\tan \pi z = 0$ を考える。

$$\tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}$$

$$e^{2\pi i z} = 1, \text{ よって、} z = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$z = n$ で $R(z)$ は極を持たないので、(B) を利用。

$$\text{Res}(F(z), z = n) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n)F(z) = R(z)\pi \frac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'} \Big|_{z=n} = R(n)$$

原点を中心とする。半径 $R \neq$ 整数の正方向の円周を C とすると、 $R \rightarrow \infty$ では C 内部に $F(z)$ のすべての極が存在するから。

$$I = \oint_C dz R(z)\pi \cot \pi z = 2\pi i \left(\sum_k \text{Res}(F(z), \eta_k) + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R(n) \right)$$

である。 C 上では、 $z = Re^{i\theta}$ より、

$$\int_0^{2\pi} R i e^{i\theta} R (R e^{i\theta}) \pi \cot(\pi R e^{i\theta}) d\theta$$

ここで、

$$|e^{2i\pi z}| = |e^{2i\pi(R(\cos \theta + i \sin \theta))}| = |e^{2\pi R \cos \theta i} \cdot e^{-2\pi R \sin \theta}| = e^{-2\pi R \sin \theta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & (\sin \theta > 0) \\ \infty & (\sin \theta < 0) \end{cases}$$

したがって、 $\sin \theta \neq 0$ とき、

$$|\cot \pi z| = \left| \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1} \right| \rightarrow 1 (R \rightarrow \infty)$$

また、 $\sin \theta = 0$ とき、 $\cot \pi z = \pm \cot \pi R =$ 有限である。また、(A) 分子の次数 $\leq$ 分母の次数-2 であるので、 $zR(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty)$ したがって、 $R \cdot R(R e^{i\theta}) \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$

$$|I| \leq R \int_0^{2\pi} d\theta |R(z)| \pi |\cot \pi z| \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty)$$

よって、

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R(n) = - \sum_k \text{Res}(F(z), \eta_k)$$