

地球惑星物理学基礎演習 II 電磁気学 No.1

040348I 桑原將旗

平成 23 年 11 月 24 日

[1](1)

互換はそれぞれ偶関数と奇関数を入れ替えるので、

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = (-1)^2 \epsilon_{ikj} = \epsilon_{ikj}$$

となりこれは成り立つ。逆に関して、

偶関数はそれぞれ、サイクリックに $(1, 2, 3)(2, 3, 1)(3, 1, 2)$ と三つがあり、奇関数はそれぞれ、サイクリックに $(2, 1, 3)(1, 3, 2)(3, 2, 1)$ と三つがある。

上を利用して、

$$\epsilon_{123} = -\epsilon_{213} = \epsilon_{132}, \epsilon_{231} = -\epsilon_{321} = \epsilon_{213}, \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = \epsilon_{321}$$

それ以外は、たとえば $i = j$ なので、上の式に入れると、

$$\epsilon_{iik} = -\epsilon_{iik} \quad \text{より、} \epsilon_{iik} = 0$$

よってそれ以外も成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} &= [(e_i \times e_j) \cdot e_k][(e_p \times e_q) \cdot e_r] \\ &= \begin{vmatrix} (e_i)_1 & (e_i)_2 & (e_i)_3 \\ (e_j)_1 & (e_j)_2 & (e_j)_3 \\ (e_k)_1 & (e_k)_2 & (e_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e_p)_1 & (e_p)_2 & (e_p)_3 \\ (e_q)_1 & (e_q)_2 & (e_q)_3 \\ (e_r)_1 & (e_r)_2 & (e_r)_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (e_i)_1 & (e_i)_2 & (e_i)_3 \\ (e_j)_1 & (e_j)_2 & (e_j)_3 \\ (e_k)_1 & (e_k)_2 & (e_k)_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e_p)_1 & (e_q)_1 & (e_r)_1 \\ (e_p)_2 & (e_q)_2 & (e_r)_2 \\ (e_p)_3 & (e_q)_3 & (e_r)_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e_i \cdot e_p & e_i \cdot e_q & e_i \cdot e_r \\ e_j \cdot e_p & e_j \cdot e_q & e_j \cdot e_r \\ e_k \cdot e_p & e_k \cdot e_q & e_k \cdot e_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

よって、 $\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm}$ のときは、

$$\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{mk} & \delta_{ml} & \delta_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{jk} & \delta_{jl} \\ \delta_{mk} & \delta_{ml} \end{vmatrix} - \delta_{jm} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{mk} & \delta_{ml} \end{vmatrix} + \delta_{mm} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jk} & \delta_{jl} \\ \delta_{ik} & \delta_{il} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}
\end{aligned} \tag{2}$$

↑の利用すると、 $k \rightarrow j, jl \rightarrow k, m \rightarrow l$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl} = \delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{kj} = 3\delta_{ij} - \delta_{ij} = 2\delta_{ij} \tag{3}$$

↑の利用すると、 $j \rightarrow i$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 \tag{4}$$

[2](1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\phi\vec{A}) &= \partial_i(\phi A_i) = \phi\partial_i A_i + \partial_i\phi(A_i) \\
&= \phi_i\partial_i A_i + (\operatorname{grad}\phi)_i A_i = \phi\operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{grad}\phi \cdot \vec{A}
\end{aligned} \tag{5}$$

(2)

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \operatorname{div}(\vec{C}) = \partial_i C_i = \partial_i(\epsilon_{ijk} A_j B_k) \\
&= \epsilon_{ijk} \partial_i(A_j B_k) = \epsilon_{ijk} \partial_i(A_j) B_k + \epsilon_{ijk} \partial_i(B_k) A_j \\
&= \epsilon_{kij} \partial_i(A_j) B_k - \epsilon_{jik} \partial_i(B_k) A_j = B_k(\operatorname{rot}\vec{A})_k - A_j(\operatorname{rot}\vec{B})_j \\
&= \vec{B} \cdot \operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot}\vec{B}
\end{aligned} \tag{6}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\phi\vec{A})_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j(\phi A_k) = \epsilon_{ijk} \partial_j(\phi) A_k + \epsilon_{ijk} \phi \partial_j(A_k) \\
&= \epsilon_{ijk} (\operatorname{grad}\phi)_j A_k + \phi \epsilon_{ijk} \partial_j(A_k) = ((\operatorname{grad}\phi) \times \vec{A})_i + \phi(\operatorname{rot}\vec{A})_i
\end{aligned} \tag{7}$$

ガウスの定理、

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

(4)

$\vec{A} = \phi \operatorname{grad}\psi$ とおくと

(1) を利用して、

$$\operatorname{div}(\phi \operatorname{grad}\psi) = \phi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad}\psi$$

$$\int_V (\phi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) + \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi) dV = \int_S \phi \operatorname{grad} \psi \cdot d\vec{S}$$

(5)

証明する式をテンソル表示すると分かりやすい

$$\int_V \partial_l \phi dV = \int_S \phi dS_l$$

ここで、 $\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ に $A_i = \phi \delta_{il}$ とおくと、

$$\text{左辺} = \int_V \partial_i A_i dV = \int_V \partial_i \phi \delta_{il} dV = \int_V \partial_l \phi dV$$

$$\text{右辺} = \int_S A_i dS_i = \int_S \phi \delta_{il} dS_i = \int_S \phi dS_l$$

$$\int_V \operatorname{grad} \phi dV = \int_S \phi d\vec{S}$$

(6)

証明する式をテンソル表示すると分かりやすい

$$\int_V (\operatorname{rot} \vec{A})_i dV = \int_S (d\vec{S} \times \vec{A})_i$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} \partial_j A_k dV = \int_S \epsilon_{ijk} dS_j A_k$$

また、とある $\vec{B}$ を $\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, $\int_V \partial_j B_j dV = \int_S B_j dS_j$ に代入して、つくるので、係数を比較して、 $B_j = \epsilon_{ijk} A_k$

となるような、ものを代入すればよい。

(7)

証明する式をテンソル表示すると分かりやすい

$$\int_S (d\vec{S} \times \operatorname{grad} \phi)_i = \int_C \phi dr_i$$

$$\int_S \epsilon_{ijk} dS_j (\operatorname{grad} \phi)_k = \int_C \phi dr_i$$

$$\int_S \epsilon_{ijk} dS_j \partial_k \phi = \int_C \phi dr_i$$

ここで、 $\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$, $\int_S (\operatorname{rot} \vec{A})_i dS_i = \int_C A_i dr_i$, $\int_S \epsilon_{ijk} \partial_j A_k dS_i = \int_C A_i dr_i$ に $A_i = \phi \delta_{il}$ とおくと、

$$\text{左辺} = \int_S \epsilon_{ijk} \partial_j \phi \delta_{kl} dS_i = \int_S \epsilon_{ijl} \partial_j \phi dS_i = \int_S \epsilon_{lij} dS_i \partial_j \phi$$

$$\text{右辺} = \int_C \phi \delta_{il} dr_i = \int_C \phi dr_l$$

$A_i = \phi \delta_{il}$ の意味

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{pmatrix}$$

これを代入しているのと同じであるが、

問題なのは ϕ それ自体に添え字がなく、また $A_i = A_j = A_k = \phi$ である。したがって、 A_i, A_j, A_k それ自体には同じ添え字を添えればよいので、 $A_i = \phi \delta_{il}$ と全て、 l に変換する作業をすればよい。

[3](1)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i$$

とするとき、
 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_{x_j}$ より

$$h_i \vec{e}_i = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_{x_j}$$

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_{x_j}$$

$P = (p_{ij}) = (\frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i})$ とおくと、

$\vec{e}_i, \vec{e}_{x_j}$ はともに正規直交基底なので、その基底の変換はユニタリ行列になる。したがって $\vec{e}_{x_j} = p_{ij} \vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_i$

$$\nabla = \vec{e}_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i} \vec{e}_i (\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{1}{h_i} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_i} \vec{e}_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

(2)

ガウスの公式は、 $\int_V \text{div} \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ であるので、微小体積を考えると、(六面体を考えている。)

$$\int_V \text{div} \vec{A} dV = \text{div} \vec{A} h_1 \delta q_1 h_2 \delta q_2 h_3 \delta q_3 = \text{div} \vec{A} h_1 h_2 h_3 \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3$$

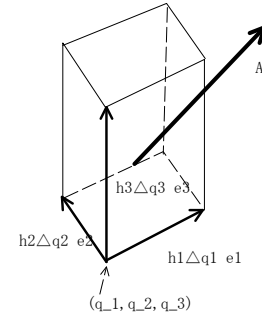


図 1:

更に、六面体のそれぞれの面積分を考えると (ここで、書きづらいのでそれぞれの変化する位置座標のだけを表している。)

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \vec{A}(q_1 + \delta q_1) \cdot \vec{e}_1(h_2(q_1 + \delta q_1)h_3(q_1 + \delta q_1)\delta q_2\delta q_3) \\
&\quad - \vec{A}(q_1) \cdot \vec{e}_1(h_2(q_1)h_3(q_1)\delta q_2\delta q_3) \\
&\quad + \vec{A}(q_2 + \delta q_2) \cdot \vec{e}_2(h_3(q_2 + \delta q_2)h_1(q_2 + \delta q_2)\delta q_3\delta q_1) \\
&\quad - \vec{A}(q_2) \cdot \vec{e}_2(h_3(q_2)h_1(q_2)\delta q_3\delta q_1) \\
&\quad + \vec{A}(q_3 + \delta q_3) \cdot \vec{e}_3(h_1(q_3 + \delta q_3)h_2(q_3 + \delta q_3)\delta q_1\delta q_2) \\
&\quad - \vec{A}(q_3) \cdot \vec{e}_3(h_1(q_3)h_2(q_3)\delta q_1\delta q_2) \\
&= A_1(q_1 + \delta q_1)(h_2(q_1 + \delta q_1)h_3(q_1 + \delta q_1)\delta q_2\delta q_3) \\
&\quad - A_1(q_1)(h_2(q_1)h_3(q_1)\delta q_2\delta q_3) \\
&\quad + A_2(q_2 + \delta q_2)(h_3(q_2 + \delta q_2)h_1(q_2 + \delta q_2)\delta q_3\delta q_1) \\
&\quad - A_2(q_2)(h_3(q_2)h_1(q_2)\delta q_3\delta q_1) \\
&\quad + A_3(q_3 + \delta q_3)(h_1(q_3 + \delta q_3)h_2(q_3 + \delta q_3)\delta q_1\delta q_2) \\
&\quad - A_3(q_3)(h_1(q_3)h_2(q_3)\delta q_1\delta q_2)
\end{aligned} \tag{8}$$

以上から

$$\begin{aligned}
\text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \quad & \left(\frac{A_1(q_1 + \delta q_1)h_2(q_1 + \delta q_1)h_3(q_1 + \delta q_1) - A_1(q_1)h_2(q_1)h_3(q_1)}{\delta q_1} \right. \\
& + \frac{A_2(q_2 + \delta q_2)h_3(q_2 + \delta q_2)h_1(q_2 + \delta q_2) - A_2(q_2)h_3(q_2)h_1(q_2)}{\delta q_2} \\
& \left. + \frac{A_3(q_3 + \delta q_3)h_1(q_3 + \delta q_3)h_2(q_3 + \delta q_3) - A_3(q_3)h_1(q_3)h_2(q_3)}{\delta q_3} \right)
\end{aligned}$$

よって、 $\delta q_1 \rightarrow 0, \delta q_2 \rightarrow 0, \delta q_3 \rightarrow 0$ とおくと、

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3} \right) \tag{9}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\Delta \psi = \text{div grad} \psi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 (\text{grad} \psi)_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 (\text{grad} \psi)_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 (\text{grad} \psi)_3)}{\partial q_3} \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(h_2 h_3 \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(h_3 h_1 \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(h_1 h_2 \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right)
\end{aligned}$$

(4)

ストークスの定理より、 q_i に垂直な微小面積を考えると、

$$\begin{aligned}
\int_S (\text{rot} \vec{A})_i dS_i &= \int_C A_i dr_i \\
\int_S (\text{rot} \vec{A})_i dS_i &= (\text{rot} \vec{A})_i h_j \delta q_j h_k \delta q_k = (\text{rot} \vec{A})_i h_j h_k \delta q_j \delta q_k
\end{aligned}$$

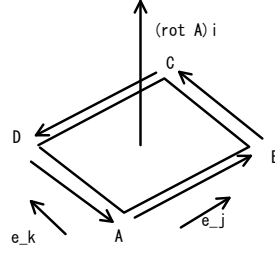


図 2:

ここで、 $A(q_i, q_j, q_k), B(q_i, q_j + \delta q_j, q_k), C(q_i, q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k), D(q_i, q_j, q_k + \delta q_k)$ として、書きづらいの
でそれぞれの変位で表すと、

$$\begin{aligned}
\int_C A_i dr_i &= \vec{A}(q_k) \cdot h_j(q_k) \delta q_j \vec{e}_j \\
&\quad + \vec{A}(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) \cdot h_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) \delta q_k \vec{e}_k \\
&\quad - \vec{A}(q_k + \delta q_k) \cdot h_j(q_k + \delta q_k) \delta q_j \vec{e}_j \\
&\quad - \vec{A}(q_k + \delta q_k) \cdot h_k(q_k + \delta q_k) \delta q_k \vec{e}_k \\
&= A_j(q_k) h_j(q_k) \delta q_j \\
&\quad + A_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) h_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) \delta q_k \\
&\quad - A_j(q_k + \delta q_k) h_j(q_k + \delta q_k) \delta q_j \\
&\quad - A_k(q_k + \delta q_k) h_k(q_k + \delta q_k) \delta q_k \\
&= (A_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) h_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) - A_k(q_k + \delta q_k) h_k(q_k + \delta q_k)) \delta q_k \\
&\quad - (A_k(q_k + \delta q_k) h_k(q_k + \delta q_k) - A_j(q_k) h_j(q_k)) \delta q_j
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
(\text{rot } \vec{A})_i &= \frac{1}{h_j h_k} \left(\frac{A_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) h_k(q_j + \delta q_j, q_k + \delta q_k) - A_k(q_k + \delta q_k) h_k(q_k + \delta q_k)}{\delta q_j} \right. \\
&\quad \left. - \frac{A_k(q_k + \delta q_k) h_k(q_k + \delta q_k) - A_j(q_k) h_j(q_k)}{\delta q_k} \right)
\end{aligned}$$

よって、 $\delta q_j \rightarrow 0, \delta q_k \rightarrow 0$ とおくと、

$$(\text{rot } \vec{A})_i = \frac{1}{h_j h_k} \left(\frac{\partial(h_k A_k)}{\partial q_j} - \frac{\partial(h_j A_j)}{\partial q_k} \right)$$