

地球惑星物理学基礎演習 No.2

040348I 桑原將旗

2011/10/12

(問 1)

(a).

w は分岐点が $z = a, b$ であり、 z は $z - a = r_1 e^{i\theta}, z - b = r_2 e^{i\theta}$ と表せる。したがって $(z - a)(z - b)$ の偏

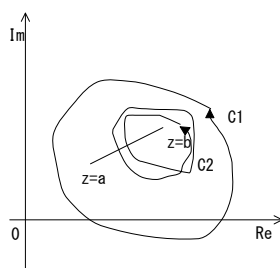


図 1:

角は、 $\arg((z - a)(z - b)) = \theta_1 + \theta_2$ となり、偏角 $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ で $w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}$ となる。いま、経路 C_1 を通過すると、 θ_1, θ_2 はどちらも $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0 \rightarrow 2\pi$ と変化するので、 $(z - a)(z - b)$ の偏角は、

$$\begin{cases} \theta_1, \theta_2 & = 0 \rightarrow 2\pi \\ \arg((z - a)(z - b)) & = 0 \rightarrow 4\pi \end{cases}$$

と変化して、 w の値は元に戻る ($w \rightarrow w_1 = w$). この場合は、 z は一葉のリーマン面上だけを動く。一方経路 C_2 を通るとき、 θ_1 は元の値に戻るが、 θ_2 は 2π だけ増加する。その結果 $\arg((z - a)(z - b))$ は 2π 増えて、関数値は元に戻らない。 ($w \rightarrow w_2 \neq w$) これに対応して、 z は他のリーマン葉に移っている。 w_1, w_2 の関数は

$$w = \begin{cases} w_1 & = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)} & (z \in D_1) \\ \arg((z - a)(z - b)) & = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + 2\pi)} & (z \in D_2) \end{cases}$$

したがって、点 $z = a, b$ を結んだ切断を形成し、この切断を通過するときに、 $D_1 \rightarrow D_2 (D_2 \rightarrow D_1)$ と他のリーマン面に移るようにすればよい。

(b).

w は分岐点が $z = a, b, c$ であり、 z は $z - a = r_1 e^{i\theta}, z - b = r_2 e^{i\theta}, z - c = r_3 e^{i\theta}$ と表せる。したがって $(z - a)(z - b)(z - c)$ の偏角は、 $\arg((z - a)(z - b)(z - c)) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ となり、偏角 $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 2\pi$ で

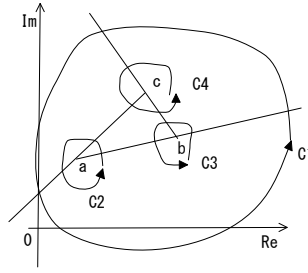


図 2:

$w = \sqrt{r_1 r_2 r_3} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}$ となる。いま、経路 C_1 を通過すると、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ はどれも $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \quad 0 \rightarrow 2\pi$ と変化するので、 $(z-a)(z-b)(z-c)$ の偏角は、

$$\begin{cases} \theta_1, \theta_2, \theta_3 & = 0 \rightarrow 2\pi \\ \arg((z-a)(z-b)(z-c)) & = 0 \rightarrow 6\pi \end{cases}$$

と変化して、 w の値は元に戻るらない ($w \rightarrow w_2 \neq w$). これに対応して、 z は他のリーマン葉に移っている。この場合は、 z は一葉のリーマン面上だけを動く。一方経路 C_2, C_3, C_4 を通るとき、 $\arg((z-a)(z-b))$ は 2π 増えて、関数値は元に戻る。 ($w \rightarrow w_1 = w$) この場合は、 z は一葉のリーマン面上だけを動く。 w_1, w_2 の関数は

$$w = \begin{cases} w_1 & = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} & (z \in D_1) \\ \arg((z-a)(z-b)) & = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\pi)} & (z \in D_2) \end{cases}$$

したがって、上図のような結んだ切断を形成し、この切断を通過するときに、 $D_1 \rightarrow D_2 (D_2 \rightarrow D_1)$ と他のリーマン面に移るようにすればよい。

(c).

$z = re^{i\theta}$ において、 $w = r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} (0 \leq \theta < 2\pi)$ 。分岐点 $z = 0$ のまわりに θ を 0 から 6π まで回転すると w

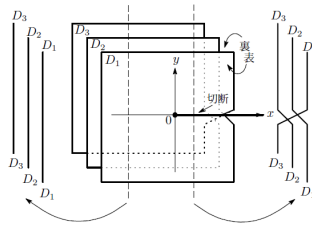


図 3:

は下表のように変化し、3 回転目でははじめのものと関数値に戻る (3 価関数)。

θ	0	$\rightarrow$	θ	$\rightarrow$	2π	$\rightarrow$	4π	$\rightarrow$	6π
z	$\sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i\theta}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i2\pi} = \sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i4\pi} = \sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i6\pi} = \sqrt{r}$
w	$\sqrt{r}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{3}}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\rightarrow$	$\sqrt{r} e^{i2\pi} = \sqrt{r}$

2 つの分岐点 $z = 0$ と $z = \infty$ を結んだ線 (実軸上 $x \geq 0$) で切断を入れる。そして $\arg(z) = 2\pi - 0$ の部

分 (D1 面の切断の裏面部分) と $\arg(z) = 2\pi + 0$ の部分 (D2 面の切断の表面部分), $\arg(z) = 4\pi - 0$ の部分 (D1 面の切断の裏面部分) と $\arg(z) = 4\pi + 0$ の部分 (D3 面の切断の表面部分) を上の図のようにつなぎ, 最後に $\arg(z) = 6\pi - 0$ の部分 (D3 面の切断の裏面部分) と $\arg(z) = 0+$ の部分 (D1 面の切断の表面部分) をつなぐ。これで 3 葉のリーマン面が完成し, z と w が 1 対 1 で対応できるようになる。

(d).

$z = re^{i\theta}$ において, $w = \log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + \log e^{i\theta} = \log r + i\theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ 分岐点 $z = 0$ のまわりに θ を 0 から $2\pi \times n$ まで回転すると, リーマン面葉の領域 D_n に入る、

逆に、分岐点 $z = 0$ のまわりに θ を 0 から $2\pi \times (-n)$ まで回転するとリーマン面葉の領域 D_{-n} に入る 2 つの分岐点 $z = 0$ と $z = \infty$ を結んだ線 (実軸上 $x \geq 0$) で切断を入れる。そして $\arg(z) = 2\pi \times n - 0$ の部分 (D_{n-1} 面の切断の裏面部分) と $\arg(z) = 2\pi \times n + 0$ の部分 (D_n 面の切断の表面部分) をつなぐ。これで ∞ 葉のリーマン面が完成し, z と w が 1 対 1 で対応できるようになる。

ここで, $w_1, w_2 \dots$ の関数は,

$$w = w_n = \log r + i(\theta + 2\pi n) (z \in D_n)$$

(問 2)

(a).

$f(z)$ が z_0 で正則あるとき、

0 の周りで定義された関数 $g(h)$ で、 $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$ となるものと、 $c \in C$ があって、

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + (z - z_0)g(z - z_0)$$

とかけ、 $c = f'(z_0)$ となる。

$$c = f'(z_0) = a + ib (a, b \in R), z_0 = x_0 + iy_0$$

とすると、

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (a + ib)(x + iy - x_0 - iy_0) + (x + iy - x_0 - iy_0)(g_1(x, y) + ig_2(x, y))$$

これを整理して、

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + (x - x_0)g_1(x, y) - (y - y_0)g_2(x, y)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + (y - y_0)g_1(x, y) + (x - x_0)g_2(x, y)$$

そこで、

$$(x - x_0)g_1(x, y) - (y - y_0)g_2(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \left(\frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_1(x, y) - \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_2(x, y) \right)$$

$$(y - y_0)g_1(x, y) + (x - x_0)g_2(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \left(\frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_1(x, y) + \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_2(x, y) \right)$$

これは、 $(x, y) = (x_0, y_0)$ のとき、連続であり、

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_1(x, y) - \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_2(x, y) = 0$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_1(x, y) + \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_2(x, y) = 0$$

となり、これが、全微分可能であるので、

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$b = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

となる。

逆に、

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = b$$

ならば、

$u(x, y), v(x, y)$ が全微分可能であるので、

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} h_1(x, y)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} h_2(x, y)$$

ここで、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h_1(x, y), h_2(x, y) = 0$$

であるものである。

ここで、

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_1(x, y) - \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_2(x, y) \\ h_2(x, y) &= \frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_1(x, y) + \frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} g_2(x, y) \end{aligned}$$

と置けるので、 $f(z)$ を求めると、

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (a + ib)(x + iy - x_0 - iy_0) + (x + iy - x_0 - iy_0)(g_1(x, y) + ig_2(x, y))$$

$$f(z) = f(z_0) + (a + ib)(z - z_0) + (z - z_0)(g_1(x, y) + ig_2(x, y))$$

ここで、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (g_1(x, y) + ig_2(x, y)) = 0$$

なので、 $f(z)$ は正則である。

(b).

$f(z)$ は正則なので。コーシーリーマンの関係式より、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(c).

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2(x, y) + v^2(x, y)) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2 + v^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2 + v^2) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
 &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

コーシーリーマンの関係式より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2
 \end{aligned}$$

よって、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) = 4|f'(z)|^2$$

(d).

i.

コーシーリーマンの関係式より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{aligned}$$

これを積分して

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \int^x dx \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{y} - 2\frac{y}{x^2 + y^2} + C(y) \\
 &= \int^y dy \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + D(x) \\
 C(y) &= -\frac{1}{y} + c, D(x) = +c
 \end{aligned}$$

であるので、

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}$$

ii.

コーシーリーマンの関係式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

これを積分して

$$\begin{aligned}v(x, y) &= \int^x dx - \frac{y}{x^2 + y^2} = -\tan^{-1} \frac{x}{y} + C(y) \\ &= \int^y dy \frac{x}{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \frac{y}{x} + D(x)\end{aligned}$$

$$C(y) = 0, D(x) = 0$$

$$z = re^{i\theta} \text{ と置くと}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \tan^{-1} \frac{y}{x} = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x} = \log r + (i\theta + 2\pi n) = \log z$$

(問 3)

(a).

$z = it (0 < t < 1)$ とおくと、

$dz = i dt$ よって、

$$\begin{aligned}\int_0^i \frac{z}{z+1} dz &= \int_0^1 \frac{it}{it+1} i dt = -\int_0^1 \frac{t}{1+it} dt \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{t}{1+t^2} + i \frac{t^2}{1+t^2}\right) dt = \int_0^1 \left(-\frac{t}{1+t^2} + i - i \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \log(1+t^2)\right]_0^1 + i[t - \tan^{-1} t]_0^1 = -\frac{1}{2} \log 2 + i\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

(b).

$z = e^{i\theta}$ とおくと、

$dz = ie^{i\theta} d\theta$ よって、 $n \neq -1$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^\pi e^{in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^\pi e^{i(n+1)\theta} d\theta = i \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n+1} (e^{i(n+1)\pi} - 1)\end{aligned}$$

$n \neq -1$ のとき、 $\int_{C_1} f(z) dz = i\pi$

$n \neq -1$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)dz &= \int_0^{-\pi} e^{in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\
&= i \int_0^{\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = i \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right]_0^{-\pi} \\
&= \frac{1}{n+1} (-e^{i(n+1)\pi} + 1)
\end{aligned}$$

$n \neq -1$ のとき、 $\int_{C_2} f(z)dz = -i\pi$

4.

$z = x + iy$ と置くと、 $\bar{z} = x - iy, dz = dx + idy$ となる。

$$\bar{z}dz = (xdx + ydy) + i(-ydx + xdy)$$

グリーンの公式より、

$$\begin{aligned}
\oint_C \bar{z}dz &= \oint_C (xdx + ydy) + i \oint_C (-ydx + xdy) \\
&= \int_S \left(-\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) dxdy + i \int_S \left(\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x}\right) dxdy \\
&= i \int_S 2dxdy = 2iS
\end{aligned} \tag{1}$$

ゆえに、

$$S = \frac{1}{2i} \oint_C \bar{z}dz$$

5.

(a).

数学的帰納法を用いて証明する

(i) $n = 1$ のとき

コーシー積分公式より

$$\begin{aligned}
2\pi i f(z) &= \oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
2\pi i f(z+h) &= \oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z+h)} d\zeta
\end{aligned}$$

両辺を引いて、 h で割って $h \rightarrow 0$ の極限を考えると

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2\pi i \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \oint_c \frac{f(\zeta)h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)h} d\zeta$$

極限 $h \rightarrow 0$ と積分の順序を入れ替えて、

$$\begin{aligned}
2\pi i f'(z) &= \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta
\end{aligned}$$

(i) $n = k (\geq 1)$ のとき正しいと仮定すると

帰納法の仮定より

$$\frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z) = \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

$$\frac{2\pi i}{K!} f^{(k)}(z+h) = \oint_c \frac{f(\zeta)}{\{\zeta - (z+h)\}^{k+1}} d\zeta$$

両辺を引いて、h で割って $h \rightarrow 0$ の極限を考えると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi i}{k!} \frac{f^k(z+h) - f^k(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}} \frac{(\zeta - z)^{k+1} - (\zeta - z - h)^{k+1}}{h} d\zeta$$

極限 $h \rightarrow 0$ と積分の順序を入れ替えて、

$$\frac{2\pi i}{k!} f^{(k+1)}(z) = \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}} \times (k+1)(\zeta - z)^k d\zeta$$

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta$$

$n = k+1$ のときも成り立つ

(i)(ii) より題意は示された。

(b).

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(z) t^n = e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((-1)^n \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n} \right) t^n \\ &= e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n} \right) (-t)^n = e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta - z)^{n+1}} (-t)^n d\zeta \\ &= \frac{e^{z^2}}{2\pi i} \oint_c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta - z)} \left(\frac{-t}{\zeta - z} \right)^n d\zeta = \frac{e^{z^2}}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta - z)} \frac{1}{1 - \frac{-t}{\zeta - z}} d\zeta \quad \left(\left| \frac{-t}{\zeta - z} \right| < 1 \Leftrightarrow |t| < |\zeta - z| \text{ より} \right) \\ &= \frac{e^{z^2}}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - z + t} d\zeta \\ &\quad \text{ここで、非積分関数は } \zeta = z - t \text{ で、正則ではないので、} 2\pi i R \quad (R \text{ は留数となる}) \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow (z-t)} (\zeta - z + t) \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta - z + t} = \lim_{\zeta \rightarrow (z-t)} e^{-\zeta^2} = e^{-(z-t)^2} \\ &= \frac{e^{z^2}}{2\pi i} 2\pi i e^{-(z-t)^2} = e^{2\pi t - t^2} \end{aligned}$$