

1. 複素数の数列 $\{z_n\}$ が α に収束するとは、任意の正数 ϵ に対して整数 N が存在し、 $n > N$ ならば $|z_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つことをいう。

(a) $a_n \rightarrow \alpha$ ならば $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n \rightarrow \alpha$ であることを示せ。

(b) 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \alpha$ を満足するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = \alpha$ となることを示せ。

(c) 数列 $\{z_n\}$ が収束するための必要十分条件は、任意の正数 ϵ に対して整数 N が存在し、 $p > N, q > N$ ならば $|z_p - z_q| < \epsilon$ となることである。(Cauchy の判定法) このような性質を持つ数列を Cauchy 列という。

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ を正項級数、 $\{a_n\}$ をある正数列とすると、次のことを示せ。

(a) i. 十分大きな n に対し $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq K$ が成り立つならば級数 $\sum_n u_n$ は収束する。ただし K は n に無関係なある正数である。(Kummer の判定法)

ii. 十分大きな n に対し $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ が発散するならば、級数 $\sum_n u_n$ は発散する。

(b) $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right)$ と K を定義したとき、

i. $K > 0$ ならば級数 $\sum_n u_n$ は収束する。

ii. $K < 0$ かつ $\sum_n \frac{1}{a_n}$ が発散するならば級数 $\sum_n u_n$ は発散する。

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1$ なら級数 $\sum_n u_n$ は収束し、 < 1 なら発散する。(Rabbe の判定法)

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ なら級数 $\sum_n u_n$ は収束し、 < 1 なら発散する。(D'Alembert の判定法)

(e) $n \rightarrow \infty$ のとき、有界な数列 $\{\gamma_n\}$ を用いて

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^p}, \quad (p > 1)$$

となるならば、級数 $\sum_n u_n$ は $\beta > 1$ のとき収束、 $\beta \leq 1$ のとき発散する。(Gauss の判定法)

3. a, b, c, z を複素数、 $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$ 、 $(a)_0 = 1$ とする。Gauss の超幾何級数

$$F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k$$

は $|z| < 1$ のとき、または $|z| = 1$ かつ $\Re(c - a - b) > 0$ のとき、絶対収束することを示せ。 $\Re(z)$ は z の実部を表すものとする。

4. 領域 D で定義された関数列 $\{u_n(z)\}$ に対し、ある正数列 $\{M_n\}$ が存在して、任意の $z \in D$ に対し

$$|u_n(z)| < M_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとする。このとき $\sum_n M_n$ が収束するならば、 $\sum_n u_n(z)$ は D において一様かつ絶対収束することを証明せよ。(Weierstrass の M 判定法)

5. 次の各問に答えよ。

(a) 数列 $z_n = \frac{1}{n} e^{i \frac{\pi}{4}}$ を複素平面上の点列として図示し、その収束、発散を判定せよ。

(b) 関数 $z/\bar{z}$ の $z \rightarrow 0$ における極限を調べよ。

(c) 関数 $f(z) = \begin{cases} (z + \bar{z})/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$ の $z = 0$ における連続性を調べよ。