

# 電磁気学 I

2005 年 3 月 7 日 平成 16 年度 担当：駒宮幸男

- 次の、電磁気学 I の講義に準拠した 4 つの問題 [1], [2], [3], [4], 全てに解答せよ。

- [1] 時刻  $t < 0$  のとき  $x < 0$  の遠方から速度  $v (v > 0)$  で走ってきた電荷  $q (q > 0)$  が、 $t = 0$  で  $x = 0$  に達して速度  $-v$  で折り返す。但し  $v$  は相対論的な速さであるとする。このとき、 $x$ -軸を含む平面において、時刻 (a)  $t < 0$  及び (b)  $t > 0$  で電荷  $q$  の作る電場 (電気力線とその方向) をそれぞれ図示せよ (フリーハンドでよい、概要が分かればよい)。[配点 20 点]
- [2] 宇宙には 2.7K の絶対温度に対応するエネルギーを持つ背景放射が満ちている。光子のエネルギーはプランク分布をしているが、簡単のために 2.7K に対応する一定のエネルギーであると仮定する。高エネルギー宇宙線の陽子 (p) がこの光子 ( $\gamma$ ) と衝突すると  $\pi^0$  中間子が生成されることがある ( $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ )。次の 2 つの問に答えよ。必要があれば、陽子と光子の四元運動量をそれぞれ  $(E, \vec{p})$ ,  $(\epsilon, \vec{q})$ , 又、陽子と  $\pi^0$  中間子の質量をそれぞれ  $M$ ,  $m$  とせよ。[配点 20 点]
- (a) 陽子のエネルギーが決まっているとき、陽子と光子がどのような衝突をした場合に、衝突エネルギー (CMS エネルギー) が最大となるか特殊相対論を用いて計算せよ。
- (b)  $\pi^0$  中間子が生成される陽子のエネルギーの閾値 (エネルギーの最小値) を有効数字 1 桁で [eV] の単位で答えよ。但し、陽子の質量は  $0.938[\text{GeV}]$ ,  $\pi^0$  中間子の質量は  $0.135[\text{GeV}]$ , ボルツマン定数は  $k = 8.62 \times 10^{-5}[\text{eV/K}]$ ,  $1[\text{GeV}] = 10^9[\text{eV}]$  である。
- [3] 直交座標系  $xyz$ -系 ( $K$ -系) において、 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  に点電荷  $q[\text{C}]$  があり  $x$ -軸方向に速さ  $v[\text{m/s}]$  で走っている。また、 $x$ -軸に平行な  $y = r[\text{m}]$ ,  $z = 0$  の導線上に  $K$ -系での電荷線密度が  $+\lambda[\text{C/m}]$  で導線の長さ方向に一様に分布する正の電荷分布が速さ  $v_0[\text{m/s}]$  で  $x$ -軸に平行に走っている。この正電荷分布に平行して  $y = r + \delta[\text{m}]$ ,  $z = 0$  の導線上に  $K$ -系での電荷線密度が  $-\lambda[\text{C/m}]$  で、導線の長さ方向に一様に分布する負の電荷分布で速さ  $-v_0$  で  $x$ -軸に平行に走っている。但し、 $\delta$  は  $r$  に比べて十分小さい (無限小であり無視せよ)。点電荷  $q$  が静止している直交座標系を  $x'y'z'$ -系 ( $K'$ -系) とする。即ち、 $K'$ -系は  $K$ -系を  $x$ -軸方向に  $v$  で走らせた系である。 $v$  及び  $v_0$  は相対論的な速さであり、 $\beta = v/c$ ,  $\beta_0 = v_0/c$  として、次の問に答えよ。[配点 30 点]
- (a)  $+\lambda$  の電荷と  $-\lambda$  の電荷の、 $K'$ -系での  $x'$ -軸方向の速さ、 $c\beta'_+$  と  $-c\beta'_-$  をそれぞれ求めよ。
- (b)  $K$ -系で  $+\lambda[\text{C/m}]$  の電荷線密度の  $K'$ -系での値  $+\lambda'_+[\text{C/m}]$  を計算せよ。 $K$ -系で  $-\lambda[\text{C/m}]$  の電荷線密度の  $K'$ -系での値  $+\lambda'_-[\text{C/m}]$  を計算せよ。 $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $\lambda$  を用いよ。
- (c)  $K'$ -系の原点  $(x', y', z') = (0, 0, 0)$  において、電荷線密度  $+\lambda'_+$  と電荷線密度  $-\lambda'_-[\text{C/m}]$  の作る電場の  $y'$  成分 ( $E'_{y+}$  と  $E'_{y-}$ ) はそれぞれいくらか計算せよ。
- (d) (c) の電場を足し合わせて、 $K'$ -系の原点  $(x', y', z') = (0, 0, 0)$  において電荷線密度  $+\lambda'_+$  と電荷線密度  $-\lambda'_-[\text{C/m}]$  の作る電場が、点電荷  $q[\text{C}]$  に及ぼす  $y'$  方向の力  $F'_y$  を計算せよ。
- (e)  $K$ -系でのこの力 ( $F_y = \sqrt{1 - \beta^2} F'_y$ ) が、導線上の  $+\lambda$  と  $-\lambda[\text{C/m}]$  の作る電場が作る電流による磁場の中で、点電荷  $q[\text{C}]$  が受けるローレンツ力であることを示せ。

[4] 電磁場の振る舞いを記述する Maxwell 方程式は SI 単位系では次の 4 式である.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

但し,  $\vec{E}$  は電場,  $\vec{B}$  は磁場,  $\rho$  は電荷密度,  $\vec{J}$  は電流密度, であり, これらは位置  $\vec{x}$  と時間  $t$  の関数である. 又,  $\epsilon_0$  は真空の誘電率,  $\mu_0$  は真空の誘磁率である. 必要ならば  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$  が任意の 2 階微分可能なベクトル  $\vec{F}$  について成り立ち,  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = 0$  が任意の 2 階微分可能な関数  $\psi$  について成り立つことを用いよ. 次の 5 つの問に答えよ. [配点 30 点]

- (a) 空間に任意の閉領域  $V$  (表面  $S$ ) を考え, (1) 及び (2) 式を, それぞれガウスの定理を用いて  $S$  での面積分の形で表せ. 但し閉領域  $V$  の電荷の総和を  $Q$  とする. 次に空間に任意の閉曲線  $C$  とこの閉曲線に張る面  $S$  を考え, (3) 及び (4) 式を面  $S$  での面積分のかたちで表せ. さらに (3) 及び (4) 式の左辺の面  $S$  上での面積分を, ストークスの定理を用いて  $C$  上での線積分の形で表せ.
- (b) 問 (a) のそれぞれの積分方程式は物理的に何を意味するのか簡潔に記せ.
- (c) 式 (3) 右辺の積分  $-d[\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}]/dt$  は物理的に何を意味するのか記せ. 又, 式 (4) 右辺第一項の積分  $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  と右辺第二項の積分  $\int_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  は物理的に何を意味するのか記せ.
- (d)  $\partial \rho / \partial t \neq 0$  のとき, 式 (4) の第二項が必要となる理由を説明せよ.
- (e) 適当なベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  及びスカラーポテンシャル  $\phi$  を導入することにより,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6)$$

と表せる事を示せ.

# 電磁気学Ⅰ

2003 年 3 月 3 日 平成 14 年度 担当：櫻井

[第 1 問] 慣性系  $K$  に対して速度  $u$  で  $x$  方向に進む慣性系  $K'$  の時空座標  $(t', x', y', z')$  は  $K$  の時空座標  $(t, x, y, z)$  と光速  $c$  を用いて

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

と表される (ローレンツ変換)。以下の設問に答えよ。

- (i) 長さ 10m のロケットが相対論的な速度で進んでいる。
  - (a) 観測者 A がこのロケットの長さを測ったら 1m であった。観測者 A が静止している慣性系  $K$  でのロケットの速度はいくらか? 光速  $c$  を単位として有効数字 2 桁で求めよ。
  - (b) ロケットの乗務員は、慣性系  $K$  での 1m (ロケットの進行方向) を何メートルと観測するか?
  - (c) 観測者 A は、このロケットの進行方向に、1m 間隔である装置を取り付けた。この装置は、ロケットが来た瞬間に同時に二つの装置からボールを出し、ロケットの両端に当てる装置である。長さ 10m のロケットから観測するとこのボールはどこに当たるか? その理由も簡単に述べること。
- (ii) 慣性系  $K$  で、速度  $v$  の粒子が、 $x$  軸から角度  $\theta$  の方向に進んでいる。慣性系  $K$  の  $x$  軸方向に速度  $u$  で運動している慣性系  $K'$  で粒子の方向を観測するとその角度  $\theta'$  はいくらか。 $\theta'$  は  $x'$  軸から測った角度で、 $x$  軸と  $x'$  軸は平行で重なっているとする。

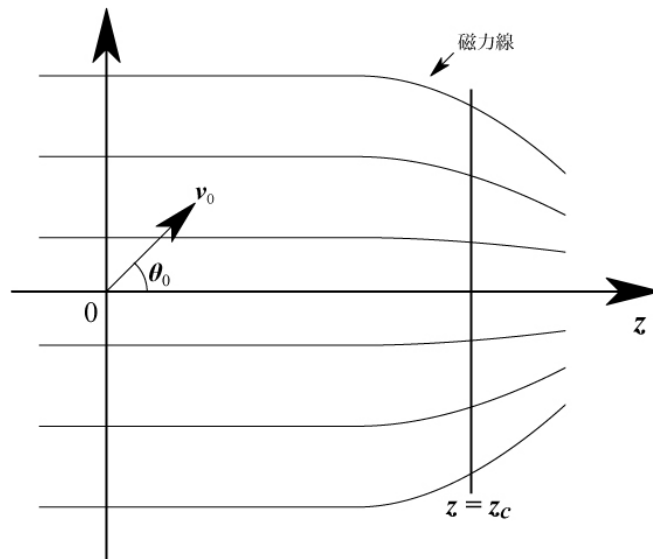
[第 2 問] 相対論的な速度  $\mathbf{v} (|\mathbf{v}| = v)$  で運動している荷電粒子 A (電荷  $q$ ) のつくる電磁場  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  は、

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - v^2/c^2}{1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

と与えられる。ここで  $\mathbf{r}$  は、粒子の位置から観測点までのベクトル、 $\theta$  は、 $r$  と  $v$  との間の角度である。粒子 A は  $x$  軸上をプラス方向に進んでいる。以下の問に答えよ。

- (i) 原点 O,  $y$  軸上の点 P(0,  $b$ , 0), それぞれの点での電場, 磁場の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分を時間の関数で表し、グラフにせよ。但し荷電粒子は、時間  $t = 0$  で原点を通過するものとする。
- (ii) 荷電粒子 A が  $t = -\infty$  から  $t = \infty$  まで運動したとき、点 O, P での電場, 磁場の積分値はゼロかそれ以外か。ゼロ以外の場合には方向を図示せよ。
- (iii) 荷電粒子 A が  $x$  軸のマイナス側にいる。荷電粒子 B (電荷  $q'$ ) が原点 O にあり、 $y$  軸上をマイナスの方向に速度  $v_b$  で運動している。このとき、粒子 A, 粒子 B それぞれに働く力の方向を図示せよ。図示する際に簡単に理由も述べること。次に、自分の答えが正しいかどうかを判断し、誤りと判断した場合は正しい答えを導くための方法を述べよ。

[第3問] 図のように  $z$  軸回りに対照に分布している不均一磁場中での荷電粒子の運動を考える．原点に電荷  $q$  をもった荷電粒子が**非相対論的**な速度  $v_0$  で， $z$  軸に対し角度  $\theta_0$  の方向二つ進んでいる．荷電粒子の質量は  $M$  とする．以下の設問に答えよ．



- (i) 原点の磁場が  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  のとき，荷電粒子は  $z$  軸に垂直な面で円軌道を描く．この軌道半径  $r_0$  を求めよ．ただし，粒子の運動に伴って，磁場は大きく変化しないものとする．  
(ii) 磁気モーメント  $\mathbf{m}$  は，電流密度  $\mathbf{j}$  を用いて

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x'$$

と与えられる．荷電粒子が半径  $r$  の円軌道を描く場合，円軌道に沿った速度成分  $v_{\perp}$  を用いると， $\mathbf{m}$  の大きさは， $m = \frac{1}{2} q v_{\perp} r$  となることを示せ．

- (iii)  $z = z_c$  での磁場が  $(0, 0, B_c)$  のとき， $z_c$  で粒子が反射する条件を， $B$ ， $B_c$ ， $\theta_0$  を用いて表せ．このとき，磁気モーメント  $m$  と荷電粒子の運動エネルギーが保存することを示せ．  
(iv) 荷電粒子の運動のみに着目すると運動量保存則が敗れているように見える．この議論を正せ．  
(v) 不均一磁場を用いて荷電粒子を閉じ込める装置を考案し，その概念図を示せ．