

② ① に代入して $\widehat{\phi}$ についての式にする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\phi}(p,t) \right) e^{ipx} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \widehat{\phi}(p,t) (-p^2) e^{ipx}$$

両辺に $e^{-i(p-q)x}$ をかけ x で積分する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\phi}(p,t) \right) e^{i(p-q)x} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \widehat{\phi}(p,t) (-p^2) e^{i(p-q)x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\phi}(q,t) = - \int_{-\infty}^{\infty} q^2 \widehat{\phi}(q,t) \quad \text{と簡単にわかる。}$$

$$\widehat{\phi}(q,t) = C(q) e^{-\frac{1}{2} q^2 t} \quad (C(q) \text{ は } q \text{ の任意関数 (初期条件)})$$

初期条件が $\phi(x,0) = \delta(x)$ の時 $\rightarrow$ ほとんど必ず成り立つ。

$$\widehat{\phi}(q,t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) e^{-iqx} = 1$$

Fourier変換
 $\downarrow$
1

よって $C(q) = 1$ (定数) かつ $\widehat{\phi}(q,t) = e^{-\frac{1}{2} q^2 t}$

これを逆変換にする。

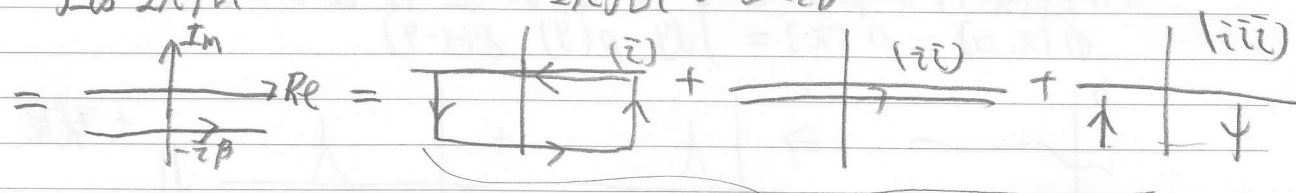
$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \widehat{\phi}(p,t) e^{ipx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} p^2 t} e^{ipx}$$

x と p の肩を平方完成すると $-\frac{1}{2} p^2 t + ipx = -\frac{1}{2} t \left(p - \frac{ix}{t} \right)^2 - \frac{x^2}{4t}$

$$\phi(x,t) = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} t \left(p - \frac{ix}{t} \right)^2}$$

$\sqrt{2t} p = y \quad \sqrt{2t} \frac{ix}{t} = \beta$ とおくと

$$\textcircled{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi \sqrt{2t}} e^{-\frac{1}{2} (y - i\beta)^2} = \frac{1}{2\pi \sqrt{2t}} \int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} dz e^{-\frac{1}{2} z^2}$$

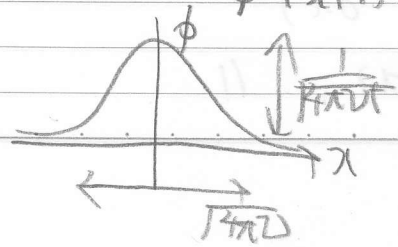


$(i) = 0$
 $(ii) = \int_{-R}^R e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad (iii) = \int_{-R-i\beta}^R e^{-\frac{1}{2} (-R+iy)^2} i dy + \int_0^{-\beta} e^{-\frac{1}{2} (R+iy)^2} i dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

よって $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\beta}{-i\beta} dz e^{-\frac{1}{2} z^2} = \sqrt{\pi}$

$$\textcircled{A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi \sqrt{2t}}$$

よって $\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ + ガウス分布



コメント $t \rightarrow 0$ ではたしかに $\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow 0 = \delta(x)$
 $t < 0$ では積分が収束せず解なし