

⑧ δ 関数のより正しい定義

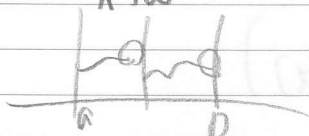
Ditrichlet の積分定理

cf 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論」

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で有限個の単調な区間に分たれるとせよ。

このとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{\pi x} dx = \begin{cases} 0 & (a < b < 0) \\ \frac{1}{2} f(-0) & (a < b = 0) \\ \frac{1}{2} \{ f(-0) + f(+0) \} & (a < 0 < b) \\ \frac{1}{2} f(+0) & (a = 0 < b) \\ 0 & (0 < a < b) \end{cases}$$



特に $f(x)$ が $x=0$ で連続なとき、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{\pi x} dx = f(0) \quad (a < 0 < b)$$

※ 実は (1.A.1) (1.A.2) で出てきた δ 関数も同じように「厳密に振動するが」⑧ はミスをというわけではない

(1.A.2) の式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{i\pi} e^{ipx} \right]_{-\lambda}^{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \lambda x}{\pi x} = \delta(x) \quad \parallel \end{aligned}$$

(1.A.1) の式

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = \delta(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad \text{と} \quad \pi \neq x$$

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \right)$$

$$\begin{aligned} D(x) \sin x &= \frac{1}{2\pi} \left(\sin x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \sin x \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\sin x + \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} [\sin(N-1)x + \sin Nx] = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{1}{2}x \sin(N-\frac{1}{2})x \\ &= x \cos \frac{1}{2}x \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(N-\frac{1}{2})x}{\pi x} = x \cos \frac{1}{2}x \delta(x) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad D(x) = \frac{x \cos \frac{1}{2}x}{\sin x} \delta(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \delta(x) = \delta(x) \quad \parallel$$

以上より道は終了

$$\phi_{1,2,3} \text{ の つづき } \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{--- ①}$$

x 方向に Fourier 変換

$$\tilde{\phi}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x, t) e^{-ipx}$$

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \tilde{\phi}(p, t) e^{ipx} \quad \text{--- ②}$$