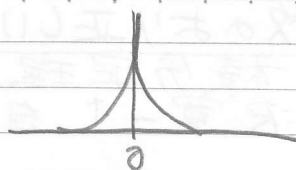


φ 1. A. 3 δ 関数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \text{ である}$$

→ 本質的なのはこれ。 — (X)

性質 $\delta(-x) = \delta(x)$ $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a > 0)$

「証明」 $y = ax$ とし

$$1 = \int \delta(y) dy = a \int \delta(ax) dx \quad \therefore a \delta(ax) = \delta(x)$$

より、一般に言えると

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(a_i)|} \delta(x - a_i) \quad (a_i \text{ は } f(x) = 0 \text{ 根})$$

(例) $f'(a_i) = 0$ の場合は、

$$f(x) = x^2$$

$$\delta(x^2) = \frac{\delta(x)}{2x}$$

$$\int d(x^2) \delta(x^2) = 1$$

$$= \int 2x dx \frac{\delta(x)}{2x} = 1 \quad \rightarrow \text{OK!}$$

○ 微分 $\delta'(x)$ は 部分積分を利用すればよく、

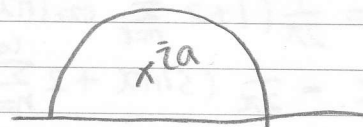
$$\int f(x) \delta'(x) dx = [f(x) \delta(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int f'(x) \delta(x) dx = -f'(0)$$

○ $\delta(x)$ を 別なもので表現 すると

$$\textcircled{1} \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{x - ia} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$$

たしかに $\begin{cases} \delta(x) = 0 & (x \neq 0) \\ \delta(x) = \infty & (x = 0) \end{cases}$ となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = 1 \text{ である}$$



$$\textcircled{2} \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \quad (a > 0)$$

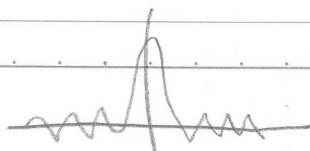
たしかに $\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$ である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} dx \xrightarrow{y = x/a} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1$$

$$\textcircled{3} \quad \delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \lambda x}{\pi x}$$

$x \neq 0$ だと $\delta(x) = 0$ ではないが

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \text{ である。}$$



— (X)