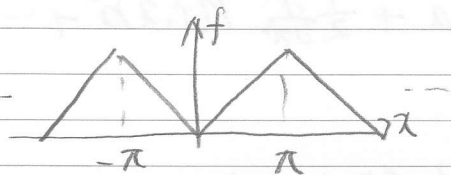


(例1) $f(x) = |x| \quad -\pi \leq x \leq \pi$



$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} |x| dx$$

$$= \begin{cases} C_0 = \frac{1}{2} \\ C_n = \begin{cases} 0 & (n=\text{even } n \neq 0) \\ -\frac{2}{\pi n^2} & (n=\text{odd}) \end{cases} \end{cases}$$

の実際には
計算に注意

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots} -\frac{2}{\pi n^2} e^{inx} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots} -\frac{4}{\pi n^2} \cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right) \end{aligned}$$

ちなみに $x=0$ と $x=\pi$ と

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) \quad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \quad (\pi \text{ の近似式})$$

(例2)

$f(x)$ は不連続でもよい なぜなら不連続な点で級数は $\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon))$ に収束するからだ。

$$\begin{aligned} \text{たとえば } f(x) &= \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases} \\ C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} \cdot 1 dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n=0) \\ \frac{1}{i\pi n} & (n=\text{odd}) \\ 0 & (n=\text{even}) \end{cases} \\ f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{i\pi n} e^{inx} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{2}{\pi n} \sin(nx) \end{aligned}$$

==> 不連続な点 $x=0$ $x=\pi$ では

$$f(0) = f(\pi) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

φ 1.4.2 Fourier 変換 (積分) ← (1.4.1 で連続的にしたものを)

$f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$ に対し

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{逆変換 } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp \quad \text{--- (2)}$$

(注意) ①②の係数を

① $1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ② $\frac{1}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ にするものもある。

① → ② の証明

$$\begin{aligned} \text{(2) の右辺} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ipy} dy \right) e^{ipx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)} dp \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) 2\pi \delta(x-y) dy \\ &= f(x) = \text{②の左辺} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = \delta(x) \quad \text{==> も φ 1.4.3 で示す。}$$

φ 1.4.1 の
離散的表現
との比較はよう