

$P(t, x \pm a)$ をテイラー展開すると

$$P(t, x \pm a) = P(t, x) \pm \frac{\partial}{\partial x} P(t, x) a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(t, x) a^2 + \dots$$

とあるが

(5II) は 2 次元版

$$\text{よって } \frac{\partial}{\partial t} P = \left(\frac{a^2}{2\Delta t} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

熱伝導方程式の形

本当は $P(t, x) a = P(t, x)$ の確率密度 P で散らかりと確率が ∞ になる

↓

どこでえではどうなるでしょう?

φ 1.2.3 Fourier 変換による解法

ある関数 f のみに対す方程式を直接解くよりもその Fourier 変換がみに対す方程式を解く方が果かこたよくある。

$$f(f' \dots) \xrightarrow{\text{フーリエ}} \hat{f}(p) \xrightarrow{\text{フーリエ}} \hat{f}(p) \xrightarrow{\text{フーリエ}} \hat{f}(p) \dots = 0$$

← 解が簡単に解ける

φ 1.A ニニで寄り道 フーリエ級数、フーリエ変換とデルタ関数の復習をしよう。

φ 1.A.1 Fourier 級数 (複素数関数バージョン)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad - ① \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \quad - ②$$

① → ② の証明

$$\begin{aligned} (② \text{ の右辺}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left(\sum_m C_m e^{imx} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_m C_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m C_m 2\pi \delta_{mn} = C_n \end{aligned}$$

項別積分定理

② → ① の証明

$$\begin{aligned} (① \text{ の右辺}) &= \sum_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y) dy \cdot e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{i(n-x)y} f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-y) f(y) dy = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{ニニで } f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と利用してニニとは φ 1.A.3 で示す。

ニニで Fourier 級数の例を見る (例1) (例2) ニニにしよう。