

これ以降は熱伝導方程式を導くこととしている。
いろいろ物理のしごと (φ1.2.1 と φ1.2.2 で)

φ 1.2.1 熱伝導 [例1.1]

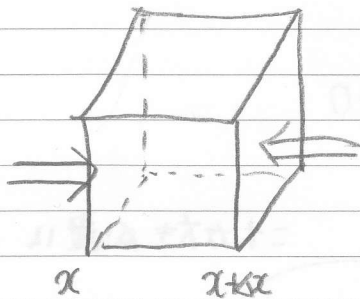
物質中の温度は $T(x, y, z)$ で、ここで微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ を考える。

時間 Δt の間に位置 x の面 $\Delta A (= \Delta y \Delta z)$ に入る熱量は

$$\Delta q_{\text{in}} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x(x)} \Delta A \Delta t$$

高温が $\leftarrow$ 温度勾配 (k/m)

低温 $\rightarrow$ 熱伝導率 ($W/m \cdot K = J/s \cdot m \cdot K$)



x $x+\Delta x$

$x+\Delta x$ の面から入る分は

$$\Delta q_{\text{out}} = +k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \Delta A \Delta t$$

↑ テイラー展開

$$= k \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta A \Delta t + O(\Delta x^2)$$

このように実験事実として与えられる (このとき k は定数とする)

合わせて

$$\Delta q = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \Delta A \Delta t$$

y, z も同じようにしてその和は

$$\Delta q_{\text{全}} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \Delta V \Delta t \quad (1)$$

一方で温度上昇 ΔT と熱量変化 Δq の関係は

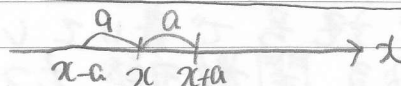
$$\Delta q = c \rho \Delta T \Delta V \quad (2)$$

$$(1)(2)より \quad c \rho \Delta T = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \Delta T$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ とすると } \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{k}{c \rho} \right) \Delta T \quad \text{熱拡散率 (m}^2/\text{s)}$$

φ 1.2.2 ランダムウォーク [例1.2]

1次元上で



時間 Δt に $\frac{1}{2}$ の確率で
とりのどちらかに移動する

時刻 t に場所 x にいる確率を $P(t, x)$ とすると、

$$P(t + \Delta t, x) = \frac{1}{2} P(t, x+a) + \frac{1}{2} P(t, x-a)$$

よって

$$P(t + \Delta t, x) - P(t, x) = \frac{1}{2} [P(t, x+a) - 2P(t, x) + P(t, x-a)]$$

連続極限 $a \rightarrow 0 \quad \Delta t \rightarrow 0$ (離散対象のものを連続対象にする)

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial}{\partial t} P(t, x) \Delta t + O(\Delta t)^2$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(t, x) a^2 + O(a^4) \quad \leftarrow 2\text{-次近似}$$