

演習問題の解答と解説(10月17日の)

まずは二重振り子のラグランジアンと運動方程式を求める問題．とりあえず一般的にラグランジアンを求めてから今回の問題設定の値を代入する方針をとります．運動エネルギー T を間違えないように！

■ 解

質点 1 の運動エネルギー T_1 は $T_1 = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta})^2$ であり，

重力ポテンシャルの基準点を O にとれば

ポテンシャルエネルギーは $U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta$ ．

次に質点 2 の運動エネルギーとポテンシャルを調べる．

質点 2 のデカルト座標 (x_2, y_2) はそれぞれ

$x_2 = l_1 \sin \theta + l_2 \sin \phi$, $y_2 = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \phi$ である．

したがって

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \cos \theta \cdot \dot{\theta} + l_2 \cos \phi \cdot \dot{\phi} \\ \dot{y}_2 = -l_1 \sin \theta \cdot \dot{\theta} - l_2 \sin \phi \cdot \dot{\phi} \end{cases} \text{ となり,}$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dots = (l_1 \dot{\theta})^2 + (l_2 \dot{\phi})^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi)$$

となるから， $T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ は求められた．

ポテンシャルエネルギーは $U_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta + l_2 \cos \phi)$ ．

以上より，この系のラグランジアン L は

$$\begin{aligned} L &= T_1 + T_2 - U_1 - U_2 \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} (l_1 \dot{\theta})^2 + \frac{m_2}{2} (l_2 \dot{\phi})^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta + m_2 g l_2 \cos \phi \end{aligned}$$

いま，問題設定では $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ であったから，求めるラグランジアンは結局

$$L = m(l\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2}(l\dot{\phi})^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

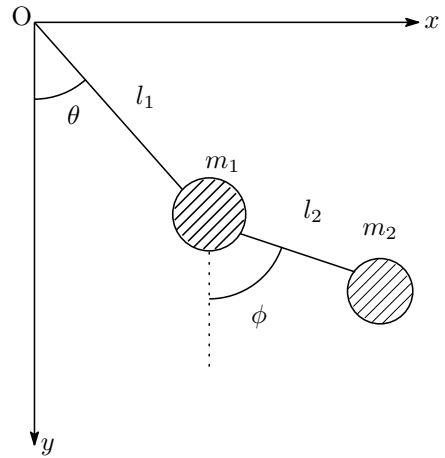
ラグランジュの方程式に代入して計算すれば，以下の 2 式を得る．

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\phi}\cos(\theta - \phi) + ml^2\dot{\phi}^2\sin(\theta - \phi) + 2mgl\sin\theta = 0 \\ ml^2\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\theta}\cos(\theta - \phi) - ml^2\dot{\theta}^2\sin(\theta - \phi) + mgl\sin\phi = 0 \end{cases}$$

(独り言など)

☆ y 軸を鉛直下向きにとったのに，重力ポテンシャルがマイナスでいいの？という質問を受けそうですが， y 軸を導入したのはあくまで質点 2 をデカルト座標で表すためであるので，重力ポテンシャルを考えると鉛直上向きで考えていることに注意．まあよーするに質点 1 は基準点 O から $l_1 \cos \theta$ だけ下に，質点 2 は基準点 O から $l_1 \cos \theta + l_2 \cos \phi$ だけ下にあるっていう位置関係（というか量関係？）を把握すればオッケー！

☆ よくある誤りとして想定されるのは，質点 2 の運動エネルギーを $\frac{m}{2}(l\dot{\phi})^2$ としてしまうことでしょうか．ラグランジュの方程式で独立（とみなしている）変数は $\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}$ であるから質点 2 の振れ角は



独立になるのではないかな？というような考えが根底にあっての間違いだと思います。しかし、いま束縛条件があるので、質点2の振れ角は質点1の運動に影響されます(つまり独立というわけではない!!)。然るに質点2の運動エネルギーに θ 等の項が混じるわけです。ちなみに、束縛条件は x_2, y_2 の立式のところで考慮されています。偉そうにつらつら書いてますが、かくいう俺も最初同様の誤りを犯していて、最終的に得られた運動方程式を吟味することで間違いに気づきました^^;

☆最後の運動方程式の計算はめんどくさいので省略しましたが許してください><

☆間違いや質問などありましたら気軽に、遠慮なく伊藤まで連絡ください♪

お次は直線運動する質点と振り子の2体問題。上でやったのとは大差ないです。問題となるのはやはり振り子の運動エネルギーでしょうか。デカルト座標で表してから微分、という流れが一番確実です。

解

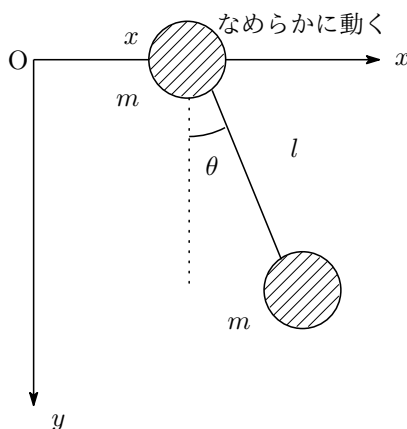
質点1の運動エネルギーは $T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$ であり、ポテンシャルエネルギーは0。

次に質点2をデカルト座標 (x_2, y_2) で記述する。

$x_2 = x_1 + l \sin \theta$, $y_2 = l \cos \theta$ であるから

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y}_2 = -l \sin \theta \cdot \dot{\theta} \end{cases} \text{であるから}$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}_1^2.$$
 したがって質点2の運動エネルギー $T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$ は求められた。



重力ポテンシャルの基準をOにとれば、 $U = -mgl \cos \theta$ であるから、この系のラグランジアンLは

$$L = T_1 + T_2 - U = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta.$$

ラグランジュの方程式に代入して計算すれば以下の2式を得る。(計算は略)

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{x}_1 \cos \theta = 0 \end{cases}$$

(独り言など)

☆注意点などは先ほどの問題と同じようなものなので、特に言うことはありません。

☆連立微分方程式の解まで求めろよwっていう意見の人がいるかもしれませんが、めんどいので省略しますww

☆間違いや質問、もっとスマートな解法がありましたら気軽に伊藤までよろしくです♪

☆残りの問題も出来次第更新していきますね♪図が安っぽいのに対しては突っ込まない方向でよろしくですww

文責：理I5組伊藤大介