# 数学Ⅰ・数学A

## （全　問　必　答）

### 第 1 問　（配点　20）

〔1〕　$n$ を負でない整数とし，$\alpha(n)$，$\beta(n)$ を

$$\alpha(n) = \frac{1+\sqrt{n}}{2+\sqrt{3}} \qquad \beta(n) = \frac{n-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

とする。$\beta(1)$ の分母を有理化すると

$$\beta(1) = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

2 次方程式 $\beta(n)x^2 - 2\sqrt{\alpha(n)}x + 1 = 0$ …①が異なる 2 つの実数解を持つような $n$ は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。また，そのような $n$ のうち最大であるものを $M$，最小であるものを $m$ とする。①で $n = m$ とした場合の実数解を $x_1$，$x_2$ $(x_1 < x_2)$，$n = M$ とした場合の実数解を $x_3$，$x_4$ $(x_3 < x_4)$ とすると

$$x_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}}{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}} - \boxed{\text{サ}}}$$

となる。また，

$$A = \beta(m)(x_2 - x_1),\quad B = \beta(M)(x_4 - x_3),\quad C = 2\sqrt{\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}}$$

の間に成立する不等式は，次の ⓪～⑤ のうち $\boxed{\text{シ}}$ である。

⓪ $A < B < C$　　① $A < C < B$　　② $B < A < C$

③ $B < C < A$　　④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

（数学Ⅰ・数学A 第 1 問は次ページに続く。）

〔２〕　次の **ス** ～ **タ** に当てはまるものを，下の ⓪～③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 $n$，実数 $x$ に関する条件 $p$， $q$， $r$， $s$ を次のように定める。

$p$ ： $x$ は 2.5 以上の有理数である

$q$ ：6 と互いに素な $n$ を用いて $n=6x$ と表される

$r$ ： $x$ は素数である

$s$ ： $x$ は奇数である

また，条件 $p$， $q$， $r$， $s$ の否定をそれぞれ $\bar{p}$， $\bar{q}$， $\bar{r}$， $\bar{s}$ で表す。このとき

$p$ は $q$ であるための **ス** 。

「$r$ かつ $s$」は $p$ であるための **セ** 。

「$\bar{q}$ かつ $s$」は $r$ であるための **ソ** 。

$\bar{r}$ は「$\bar{p}$ または $\bar{s}$」であるための **タ** 。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない

③　必要条件でも十分条件でもない

## 第 2 問 （配点　25）

$a$， $b$， $c$， $d$ を 0 でない実数とし，

$b > -1$ かつ $\mathrm{d} > 0$　…………　条件(A)

とする。2 次関数

$y = x^2 + 4ax + 3$　…………　①

$y = bx^2 + 4cx + 3$　…………　②

$y = cx + 4b$　…………　③

のグラフをそれぞれ $G_1$， $G_2$， $G_3$ とする。

$G_1$ の頂点の座標 $P_1$ を $a$ を用いて表すと

$P_1\left(-\boxed{\text{ア}}\,a,\ -\boxed{\text{イ}}\,a^2+3\right)$

である。以下では，$P_1$は第 2 象限にあり，かつ $G_2$ 上にあるとする。

（数学Ⅰ・数学A 第 2 問は次ページに続く。）

(1)　$P_1$が第２象限にあるための条件は，

$$\boxed{\text{ウ}} < a < \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{条件(B)}$$

である。また，$P_1$ が $G_2$ 上にあるための条件は

$$c = \frac{a\left(b + \boxed{\text{カ}}\right)}{\boxed{\text{キ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{条件(C)}$$

である。

(2)　条件(A)，(B)，(C)の下，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $y = x^2 + 4ax + 3$ の最大値 $M$ と最小値 $m$ を求めよう．まず，$b > 0$ のとき

$\dfrac{b}{b + \boxed{\text{ク}}} < a$ のとき

$$\begin{cases} M = \boxed{\text{ケ}}\,ab + \boxed{\text{コ}}\,a + b + 3 \\ m = \boxed{\text{サシ}}\,ab - \boxed{\text{ス}}\,a + b + 3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{セ}} < a < \dfrac{b}{b + \boxed{\text{ク}}}$ のとき

$$\begin{cases} M = \boxed{\text{ケ}}\,ab + \boxed{\text{コ}}\,a + b + 3 \\ m = -\dfrac{a^2\left(b + \boxed{\text{ソ}}\right)^2}{b} + 3 \end{cases}$$

となり，$b < 0$ のとき

$\boxed{\text{セ}} < a < -\dfrac{b}{b + \boxed{\text{ク}}}$ のとき

$$\begin{cases} M = \boxed{\text{サシ}}\,ab - \boxed{\text{ス}}\,a + b + 3 \\ m = -\dfrac{a^2\left(b + \boxed{\text{ソ}}\right)^2}{b} + 3 \end{cases}$$

$-\dfrac{b}{b + \boxed{\text{ク}}} < a$ のとき

$$\begin{cases} M = \boxed{\text{サシ}}\,ab - \boxed{\text{ス}}\,a + b + 3 \\ m = \boxed{\text{ケ}}\,ab + \boxed{\text{コ}}\,a + b + 3 \end{cases}$$

となる。したがって，$a = bd$ であるとすると，$M$ の最小値は $\boxed{\text{タ}}$，$m$ の最大値は $\boxed{\text{チ}}$ である。

(3)　条件(A)，(B)，(C)の下，$G_3$ が $P_1$ と $G_2$ の頂点 $P_2$ の両方を通るとき

$$b = \boxed{\text{ツ}}, \quad \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

## 第 3 問 （配点　30）

AB = 3， AC = 2， BC = $\sqrt{7}$ の△BAC がある。

∠BAC＝ アイ ° であり， △BAC の面積を $S$，外接円の半径を $R$，内接円の半径を $r$ とすると

$$S = \frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}},\quad R = \frac{\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}},\quad r = \frac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}} - \sqrt{\boxed{サシ}}}{\boxed{ス}}$$

である。

（数学Ⅰ・数学A 第 3 問は次ページに続く。）

(1)　∠BAC の二等分線と外接円の交点を D， AD と BC の交点を E とする。

$\mathrm{DE} = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タチ}}$ から， $\mathrm{AE} = \dfrac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}}$ である。

(2)　B と C における外接円の接線の交点を F， AD の延長と BF の交点を G とすると

四角形 ACFD の面積は $\dfrac{\boxed{ナニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネノ}}$ である。

## 第 4 問 （配点　25）

9 枚のカードに H, U, G, O, U, K, A, K, U の文字が 1 つずつ書かれている。母音とは A, I, U, E, O を指し，子音とはそれ以外の文字を指す。以下，同じ文字のカードは区別しないものとする。

(1)　無作為に 5 枚だけ取り出して並べ替える。母音だけの文字列は **アイ** 通りある。U を 3 個だけ含む文字列のうち，K を含まない文字列は **ウエオ** 通りあり，K を 1 個だけ含む文字列は **カキ** 通りあり，K を 2 個だけ含む文字列は **クケ** 通りある。U を 2 個だけ含む文字列は **コサシ** 通りあり，U を 1 個だけ含む文字列は **スセソ** 通りある。

（数学Ⅰ・数学A 第 4 問は次ページに続く。）

(2)　無作為にカードを 7 枚だけ取り出し，取り出した順に左から並べる。その文字列に連続して HUKAKU という文字群が含まれている確率は $\frac{\boxed{タ}}{2520}$ である。

　また，その文字列が GOUKAKU となる確率は $\frac{\boxed{チ}}{2520}$ である。

(3)　無作為にカードを 3 枚だけ取り出したとき，そこに含まれている母音の総数の期待値は $\frac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナニヌ}}$ であり，母音の種類数の期待値は $\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ である。

# 数学Ⅱ・数学Ｂ

## 第 1 問 （必答問題） （配点　30）

〔1〕　$X = \log_x 2$， $Y = \log_4 x$ とする。このとき，次の方程式を解こう。

$$16X^3 + 24X^2 - 135X + 16Y^3 + 24Y^2 - 135Y + 24(X + Y + 1) = 0$$

を解こう。真数と底の条件より，$x > 0$ かつ $x \neq 1$ である。 $t = \log_2 x + \log_x 4$ とおく。ところで，底の変換公式を変形すると **ア** となる。 ア に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。ただし，$a$，$b$，$c$ は対数の定義に反しない実数である。

⓪ $(\log_a b)(\log_a c) = \log_a bc$　　① $(\log_a b)(\log_a c) = \log_{2a} bc$

② $(\log_a b)(\log_a c) = \log_b c$　　③ $(\log_a b)(\log_b c) = \log_{ab} bc$

④ $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$　　⑤ $(\log_a b)(\log_b c) = \log_b c$

これを用いると

$$t^2 = \boxed{\text{イ}}^2 + \boxed{\text{ウ}}^2 + \boxed{\text{エ}}$$

$$t^3 = \boxed{\text{イ}}^3 + \boxed{\text{ウ}}^3 + \frac{\boxed{\text{オ}}}{2}\left(\boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。 イ ， ウ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。ただし，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。 イ ， ウ は解答の順序を問わない。

⓪ $X$　　① $X^{-1}$　　② $-X$

③ $Y$　　④ $Y^{-1}$　　⑤ $-Y$

よって，与えられた方程式は $t$ を用いて

$$\boxed{\text{カキ}}\,t^3+\boxed{\text{クケ}}\,t^2-135t=0$$

となる。この方程式を解くと

$$t=0,\quad -\frac{\boxed{\text{コサ}}}{4},\quad \frac{\boxed{\text{シ}}}{4}$$

である。

$t=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{4}$ のときの $x$ の値を求めよう。

$$t=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{\boxed{\text{ス}}}$$

と表されることを用いると，$x=\boxed{\text{セ}}$，$\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を得る。また，最初に与えられた方程式の解は全部で $\boxed{\text{タ}}$ 個ある。

（数学Ⅱ・数学Ｂ第１問は次ページに続く。）

〔２〕 $y = \sin 2x + \cos x$ とおくと

$$y^2 = \sin^2 2x + \left( \boxed{\text{チ}} \sin x + 1 \right) \cos^2 x$$

である。$f(y) = y^2 + ay + b$ と定義すると，$x$ を用いて

$$f(x) = \left( \boxed{\text{ツ}} \sin x + 1 \right)^2 \cos^2 x$$

$$+ \boxed{\text{テ}} \left( \boxed{\text{ト}} \sin x + 1 \right) \cos x + \boxed{\text{ナ}}$$

となる。以下，必要ならば $y = \sin 2x + \cos x$ のグラフを利用してよい。

（数学Ⅱ・数学Ｂ第１問は次ページに続く。）

$f(y)$ が $y=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{1}{25}$ をとるとする。$x$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ を動くとき，

$f(x)=\frac{1}{25}$ となるような $x$ は全部で [ ニ ] 個ある。

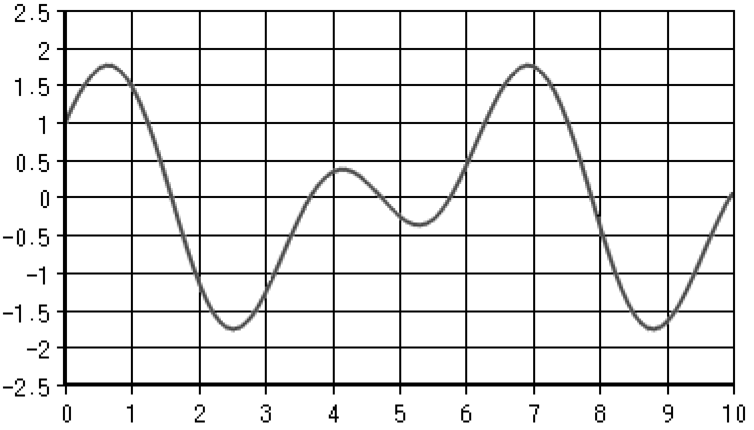
一方，$a=-\frac{2}{5}$，$b=0$ で，$x$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ を動くとき，不等式

$$f(x)>0$$

を解くと

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{4},\quad \frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}\pi < x < \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\pi,\quad \frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}\pi < x \leqq 2\pi$$

である。




参考　$y=\sin 2x+\cos x$ の $0 \leqq x \leqq 10$ におけるグラフ

## 第 2 問 （必答問題） （配点　30）

$a$， $b$ を実数とし，曲線

$$y = 2x^3 + ax^2 + bx + 5a$$

を $C$ とする。また，直線

$$y = ax$$

$$y = -a^2x + a^2$$

$$y = 6x + 50$$

$$y = 4x + 110$$

をそれぞれ直線 $L_1$， $L_2$， $L_3$， $L_4$ とする。

(1)　$x = k$ における曲線 $C$ の接線の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}}k^2 + \boxed{\text{イ}}ak + b\right)x - \boxed{\text{ウ}}k^3 - ak^2 + \boxed{\text{エ}}$$

である。 $x = a$ におけ x る曲線 $C$ の接線が，直線 $L_1$ と $L_2$ の交点を通るとき

$$\boxed{\text{オカ}}a^3 - \boxed{\text{キ}}a^2 + \boxed{\text{クケ}}a + \boxed{\text{コサ}} = 0$$

なる関係があり，これを満たす $a$ は全部で $\boxed{\text{シ}}$ 個ある。

（数学Ⅱ・数学Ｂ第 2 問は次ページに続く。）

(2)　$a=10$，$b=6$ とする。このとき，関数 $y=2x^3+ax^2+bx+5a$ は

$$x=-\boxed{\text{ス}},\quad -\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

で極値をとる。曲線 $C$ と直線 $L_3$ の共有点は全部で $\boxed{\text{チ}}$ 個あり，曲線 $C$ と直線 $L_4$ の共有点は全部で $\boxed{\text{ツ}}$ 個ある。曲線 $C$ と直線 $L_3$ および直線 $L_4$ で囲まれた図形のうち $x \leqq 0$ の部分の面積を $S$ とすると

$$S=\frac{\boxed{\text{テトナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

# 数学Ⅱ・数学Ｂ

## 第 3 問 （選択問題） （配点 20）

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = 3n - 3S_n \quad \cdots①$$

を満たす。ここで，$S_n$ は $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの総和である。

(1) ①に $n=1$ を代入することにより

$$a_1 = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

がわかる。また，①の $n$ を $n+1$ に置き換えても成り立ち

$$a_{n+1} = 3(n+1) - 3S_{n+1} \quad \cdots②$$

であるから，①と②を用いると

$$\boxed{ウ}\, a_{n+1} - a_n = \boxed{エ}$$

となる。この漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - \boxed{オ} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\left(a_n - \boxed{オ}\right)$$

となるから，$b_n = a_n - \boxed{オ}$ と置くことにより

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\, b_n$$

と表せる。これは等比数列であるから，これを解いて $b_n$ を求め，$a_n$ を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}^n} + \boxed{オ}$$

である。また，この結果を用いると

$$S_n = n - \frac{\boxed{サ}^n - \boxed{シ}}{\boxed{ス} \times \boxed{サ}^n}$$

と求めることができる。

（数学Ⅱ・数学Ｂ第 3 問は次ページに続く。）

(2)　数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = 0$ であり，漸化式

$$c_{n+1} - 2c_n = 4^n S_n \qquad \cdots③$$

を満たす。$\{c_n\}$ の一般項を求めよう。③の両辺を $2^{n+1}$ で割ると

$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{c_n}{2^n} = \boxed{\text{セ}}^{\,n} S_n$$

となる。ここで，数列 $\{d_n\}$

$$d_n = \frac{c_n}{2^n} \qquad \cdots④$$

を用いると

$$d_{n+1} - d_n = \boxed{\text{セ}}^{\,n} S_n$$

となり，これは数列 $\{d_n\}$ の階差数列である。これより $\{d_n\}$ を求めるために次の計算をしよう。数列 $\{e_n\}$ を，$q \neq 1$ を用いて，$e_n = nq^n$ とし，$T_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ とする。$qT_n - T_n = (q-1)T_n$ を具体的に計算すると

$$(q-1)T_n = \boxed{\text{ソ}}\, q^{\boxed{\text{タ}}} + \frac{q\left(1 - q^{\boxed{\text{チ}}}\right)}{q-1}$$

となる。$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，ただし，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。ただし，同じものを繰り返して選んでもよい。

⓪　$-2n$　　①　$n-1$　　②　$-n$

③　$n$　　③　$n+1$　　⑤　$2n$

したがって

$$T_n = \frac{\boxed{\text{ソ}}\, q^{\boxed{\text{タ}}}}{q-1} + \frac{q\left(1 - q^{\boxed{\text{チ}}}\right)}{(q-1)^2}$$

と求まり，これを用いて $\{d_n\}$ を求め，④に代入することで $n \geqq 2$ に対して

$$c_n = 2^n \left\{ \frac{\boxed{\text{ツ}}\left(1 - \boxed{\text{テ}}^{\boxed{\text{ト}}}\right)}{\boxed{\text{ナ}}} + \frac{1 - \dfrac{1}{\boxed{\text{ニ}}^{\boxed{\text{ヌ}}}}}{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ネ}} \times \boxed{\text{ノ}}^{\boxed{\text{ハ}}} \right\}$$

となる。$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$，$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，本問中で前に示した ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。ただし，同じものを繰り返して選んでもよい。

## 数学Ⅱ・数学 B

### 第 4 問 （選択問題） （配点 20）

すべての辺の長さが 6 である正六角柱 $\mathrm{OA_1A_2A_3A_4A_5-P_0B_1B_2B_3B_4B_5}$ がある。また，

$\vec{X}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$，$\vec{Y}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA_5}}$，$\vec{Z}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$ とする。

(1) $\triangle\mathrm{OB_2B_4}$ の面積を求めよう。まず，$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB_4}}$ を $\vec{X}$，$\vec{Y}$，$\vec{Z}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\boxed{\text{アイ}}\,\vec{X}+\boxed{\text{ウ}}\,\vec{Y}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{Z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_4}}=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{X}+\boxed{\text{アイ}}\,\vec{Y}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{Z}$$

である。したがって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}|=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB_4}}|=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。以上の結果を用いると線分 $\mathrm{OB_2}$ と $\mathrm{OB_4}$ のなす角を鋭角で $\theta$ とすると

$$\theta=\frac{\sqrt{\boxed{\text{サシス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

となるから，$\triangle\mathrm{OB_2B_4}$ の面積は $\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}$ となる。

（数学Ⅱ・数学 B 第 4 問は次ページに続く。）

(2)　△$OB_2B_4$ の周および内部の点は

$$s\mathrm{OB}_2 + t\mathrm{OB}_4 \quad (s \geqq 0 \text{ かつ } t \geqq 0 \text{ かつ } 0 \leqq s+t \leqq 1)$$

と表される。同様に，△$B_1B_3B_5$ の周および内部の点は

$$\mathrm{OB}_1 + u\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3 + v\mathrm{B}_1\mathrm{B}_5 \quad (u \geqq 0 \text{ かつ } v \geqq 0 \text{ かつ } 0 \leqq u+v \leqq 1)$$

△$OB_2B_4$ と△$B_1B_3B_5$ に共通部分があるかどうかを調べよう。そのためには，これらを $\vec{X}$，$\vec{Y}$，$\vec{Z}$ で表して，係数を比較することにより，$s$，$t$，$u$，$v$ の間の関係を求めればよい。条件を満たすような $t$，$u$，$v$ が存在するための条件は

$$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \leqq s \leqq \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

(3)　△$OB_2B_4$ を含む平面は

$$p\mathrm{OB}_2 + q\mathrm{OB}_4$$

と表される。この平面と，辺 $A_1B_1$，$A_3B_3$，$A_5B_5$ の交点を求めよう。$A_1B_1$ 上の点は

$$l\mathrm{OA}_3 + (1-l)\mathrm{OB}_3 \quad (0 \leqq l \leqq 1)$$

と表されるから，交点を$Q_1$とおくと，$P_1Q_1 = \boxed{\text{ヌ}}$ である。同様にして，$A_3B_3$，$A_5B_5$ との交点をそれぞれ $Q_3$，$Q_5$ とおくと，$P_3Q_3 = \boxed{\text{ネ}}$，$P_5Q_5 = \boxed{\text{ノ}}$ である。