

数学 I ・ 数学 A

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 20)

〔1〕 n を負でない整数とし、 $\alpha(n)$ 、 $\beta(n)$ を

$$\alpha(n) = \frac{1 + \sqrt{n}}{2 + \sqrt{3}} \quad \beta(n) = \frac{n - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

とする。 $\beta(1)$ の分母を有理化すると

$$\beta(1) = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

2 次方程式 $\beta(n)x^2 - 2\sqrt{\alpha(n)}x + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$ が異なる 2 つの実数解を持つような n は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。また、そのような n のうち最大であるものを M 、最小であるものを m とする。 $\textcircled{1}$ で $n = m$ とした場合の実数解を x_1 、 x_2 ($x_1 < x_2$)、 $n = M$ とした場合の実数解を x_3 、 x_4 ($x_3 < x_4$) とすると

$$x_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}}{\boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}}}$$

となる。また、

$$A = \beta(m)(x_2 - x_1), \quad B = \beta(M)(x_4 - x_3), \quad C = 2\sqrt{\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}}$$

の間に成立する不等式は、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{5}$ のうち $\boxed{\text{シ}}$ である。

$$\textcircled{0} \quad A < B < C$$

$$\textcircled{1} \quad A < C < B$$

$$\textcircled{2} \quad B < A < C$$

$$\textcircled{3} \quad B < C < A$$

$$\textcircled{4} \quad C < A < B$$

$$\textcircled{5} \quad C < B < A$$

(数学 I ・ 数学 A 第 1 問は次ページに続く。)

〔2〕 次の ス ～ タ に当てはまるものを、下の ①～③ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

自然数 n ，実数 x に関する条件 p ， q ， r ， s を次のように定める．

p : x は 2.5 以上の有理数である

q : 6 と互いに素な n を用いて $n = 6x$ と表される

r : x は素数である

s : x は奇数である

また、条件 p ， q ， r ， s の否定をそれぞれ $\bar{p}$ ， $\bar{q}$ ， $\bar{r}$ ， $\bar{s}$ で表す。このとき

p は q であるための ス。

「 r かつ s 」は p であるための セ。

「 $\bar{q}$ かつ s 」は r であるための ソ。

$\bar{r}$ は「 $\bar{p}$ または $\bar{s}$ 」であるための タ。

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが、十分条件でない
- ③ 十分条件であるが、必要条件でない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

数学Ⅰ・数学Ⅱ

第 2 問 (配点 25)

a, b, c, d を 0 でない実数とし、

$$b > -1 \text{ かつ } d > 0 \quad \dots\dots\dots \text{条件(A)}$$

とする。2 次関数

$$y = x^2 + 4ax + 3 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$y = bx^2 + 4cx + 3 \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

$$y = cx + 4b \quad \dots\dots\dots \text{③}$$

のグラフをそれぞれ G_1, G_2, G_3 とする。

G_1 の頂点の座標 P_1 を a を用いて表すと

$$P_1 \left(-\boxed{\text{ア}}a, -\boxed{\text{イ}}a^2 + 3 \right)$$

である。以下では、 P_1 は第 2 象限にあり、かつ G_2 上にあるとする。

(数学Ⅰ・数学Ⅱ 第 2 問は次ページに続く。)

- (1) P_1 が第 2 象限にあるための条件は,

$$\boxed{\text{ウ}} < a < \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \quad \dots\dots\dots \text{条件(B)}$$

である。また, P_1 が G_2 上にあるための条件は

$$c = \frac{a(b + \boxed{\text{カ}})}{\boxed{\text{キ}}} \quad \dots\dots\dots \text{条件(C)}$$

である。

- (2) 条件(A), (B), (C)の下, $-1 \leq x \leq 1$ における $y = x^2 + 4ax + 3$ の最大値 M と最小値 m を求めよう。まず, $b > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{b}{b + \boxed{\text{ク}}} < a \text{ のとき} & \quad \begin{cases} M = \boxed{\text{ケ}} ab + \boxed{\text{コ}} a + b + 3 \\ m = \boxed{\text{サシ}} ab - \boxed{\text{ス}} a + b + 3 \end{cases} \\ \boxed{\text{セ}} < a < \frac{b}{b + \boxed{\text{ク}}} \text{ のとき} & \quad \begin{cases} M = \boxed{\text{ケ}} ab + \boxed{\text{コ}} a + b + 3 \\ m = -\frac{a^2(b + \boxed{\text{ソ}})^2}{b} + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となり, $b < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \boxed{\text{セ}} < a < -\frac{b}{b + \boxed{\text{ク}}} \text{ のとき} & \quad \begin{cases} M = \boxed{\text{サシ}} ab - \boxed{\text{ス}} a + b + 3 \\ m = -\frac{a^2(b + \boxed{\text{ソ}})^2}{b} + 3 \end{cases} \\ -\frac{b}{b + \boxed{\text{ク}}} < a \text{ のとき} & \quad \begin{cases} M = \boxed{\text{サシ}} ab - \boxed{\text{ス}} a + b + 3 \\ m = \boxed{\text{ケ}} ab + \boxed{\text{コ}} a + b + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって, $a = bd$ であるとする, M の最小値は $\boxed{\text{タ}}$, m の最大値は $\boxed{\text{チ}}$ である。

- (3) 条件(A), (B), (C)の下, G_3 が P_1 と G_2 の頂点 P_2 の両方を通るとき

$$b = \boxed{\text{ツ}}, \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

数学 I ・ 数学 A

第 3 問 (配点 30)

$AB = 3$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{7}$ の $\triangle BAC$ がある。

$\angle BAC = \boxed{\text{アイ}}$ ° であり, $\triangle BAC$ の面積を S , 外接円の半径を R , 内接円の半径を r とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} , R = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}} , r = \frac{\boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} - \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(数学 I ・ 数学 A 第 3 問は次ページに続く。)

- (1) $\angle BAC$ の二等分線と外接円の交点を D, AD と BC の交点を E とする。

$$DE = \frac{\boxed{\text{セ}} \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}} \text{ から, } AE = \frac{\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}} \text{ である。}$$

- (2) B と C における外接円の接線の交点を F, AD の延長と BF の交点を G とすると

$$\text{四角形 ACFD の面積は } \frac{\boxed{\text{ナニ}} \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネノ}}} \text{ である。}$$

数学 I ・ 数学 A

第 4 問 (配点 25)

9 枚のカードに H, U, G, O, U, K, A, K, U の文字が 1 つずつ書かれている。
母音とは A, I, U, E, O を指し, 子音とはそれ以外の文字を指す。以下, 同じ文字
のカードは区別しないものとする。

- (1) 無作為に 5 枚だけ取り出して並べ替える。母音だけの文字列は **アイ** 通りあ
る。U を 3 個だけ含む文字列のうち, K を含まない文字列は **ウエオ** 通りあり,
K を 1 個だけ含む文字列は **カキ** 通りあり, K を 2 個だけ含む文字列は **クケ**
通りある。U を 2 個だけ含む文字列は **コサシ** 通りあり, U を 1 個だけ含む文字
列は **スセソ** 通りある。

(数学 I ・ 数学 A 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I ・ 数学 A

- (2) 無作為にカードを 7 枚だけ取り出し、取り出した順に左から並べる。その文字

列に連続して HUKAKU という文字群が含まれている確率は $\frac{\boxed{\text{タ}}}{2520}$ であり、また

その文字列が GOUKAKU となる確率は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{2520}$ である。

- (3) 無作為にカードを 3 枚だけ取り出したとき、そこに含まれている母音の総数の

期待値は $\frac{\boxed{\text{ツテト}}}{\boxed{\text{ナニヌ}}}$ であり、母音の種類数の期待値は $\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。