

数学Ⅱ・数学 B

第 3 問 (選択問題) (配点 20)

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = 3n - 3S_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。ここで、 S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの総和である。

(1) ①に $n = 1$ を代入することにより

$$a_1 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

がわかる。また、①の n を $n + 1$ に置き換えても成り立ち

$$a_{n+1} = 3(n + 1) - 3S_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、①と②を用いると

$$\boxed{\text{ウ}} a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{エ}}$$

となる。この漸化式を変形すると

$$a_{n+1} - \boxed{\text{オ}} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} (a_n - \boxed{\text{オ}})$$

となるから、 $b_n = a_n - \boxed{\text{オ}}$ と置くことにより

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} b_n$$

と表せる。これは等比数列であるから、これを解いて b_n を求め、 a_n を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} n + \boxed{\text{オ}}$$

である。また、この結果を用いると

$$S_n = n - \frac{\boxed{\text{サ}}^n - \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}} \times \boxed{\text{サ}}^n}$$

と求めることができる。

(数学Ⅱ・数学 B 第 3 問は次ページに続く。)

(2) 数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = 0$ であり, 漸化式

$$c_{n+1} - 2c_n = 4^n S_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たす。 $\{c_n\}$ の一般項を求めよう。③の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{c_n}{2^n} = \boxed{\text{セ}}^n S_n$$

となる。ここで, 数列 $\{d_n\}$

$$d_n = \frac{c_n}{2^n} \quad \cdots \textcircled{4}$$

を用いると,

$$d_{n+1} - d_n = \boxed{\text{セ}}^n S_n$$

となり, これは数列 $\{d_n\}$ の階差数列である。これより $\{d_n\}$ を求めるために次の計算をしよう。数列 $\{e_n\}$ を, $q \neq 1$ を用いて, $e_n = nq^n$ とし, $T_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ とする。 $qT_n - T_n = (q-1)T_n$ を具体的に計算すると

$$(q-1)T_n = \boxed{\text{ソ}} q^{\boxed{\text{タ}}} + \frac{q(1-q^{\boxed{\text{チ}}})}{q-1}$$

となる。 $\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを, 次の①～④ちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返して選んでもよい。

- ① $-2n$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $2n$

したがって

$$T_n = \frac{\boxed{\text{ソ}} q^{\boxed{\text{タ}}}}{q-1} + \frac{q(1-q^{\boxed{\text{チ}}})}{(q-1)^2}$$

と求まり, これを用いて $\{d_n\}$ を求め, ④に代入することで $n \geq 2$ に対して

$$c_n = 2^n \left\{ \frac{\boxed{\text{ツ}} \left(1 - \boxed{\text{テ}}^{\boxed{\text{ト}}} \right)}{\boxed{\text{ナ}}} + \frac{1 - \frac{1}{\boxed{\text{ニ}}^{\boxed{\text{ヌ}}}}}{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ネ}} \times \boxed{\text{ノ}}^{\boxed{\text{ハ}}} \right\}$$

となる。 $\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ヌ}}$, $\boxed{\text{ネ}}$, $\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを, 次の①～④のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返して選んでもよい。

- ① $-2n$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $2n$