第 3 学年 応用物理 後期中間試験 (2005.12.15)

注意　問題の番号を (a)(b)(c)... まで必ず書き，答案の区切りを明確にする．答案はすべて答案用紙に記入し，解答を得る過程を省略しない．解答を得るのに必要な図は必ず答案用紙に記入する．答案用紙は表と裏を使い，不足する場合は手を上げて請求する．地上での重力加速度は g とする．ベクトルとスカラーの記号を明確に区別する．数値を求める問題では単位を付けること．

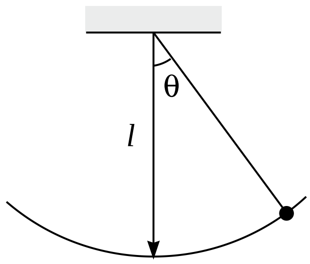
[1]　2次元極座標で，半径 r の円周上の粒子の運動を考える．

(a) 2次元極座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ を直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ でそれぞれ表し (図を描くこと)，$\dot{\boldsymbol{e}_r} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ および $\dot{\boldsymbol{e}_\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ を示せ．

(b) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ から加速度を求め，加速度の成分が $a_r = -r\dot{\theta}^2$，$a_\theta = r\ddot{\theta}$ になることを示せ．

(c) a_r および a_θ をそれぞれ r と速さ v を使って表わせ．

[2]　図のように，天井に一端を固定した長さ l の糸の他端に質量 m の小さなおもりをつけてつるす．おもりを押さえて $\theta = \theta_0$ にし，$t = 0$ に静かに放す．

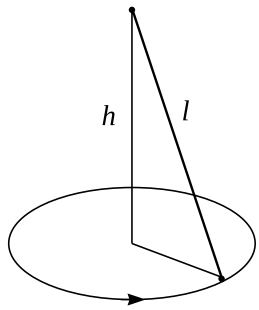


(a) 糸の張力の大きさを T として，おもりの極座標系での運動方程式の各成分を書け (力の入った図を描くこと)．

(b) 糸の張力の大きさ T を θ の関数で表わせ．また，$\theta_0 = \pi/4$ のとき，このグラフを描け (横軸 θ，縦軸 T)．

(c) 振り子の振幅が小さいとき，θ の1次近似の運動方程式を書き，その解 $\theta(t)$ を求め，周期が $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ となることを示せ (運動方程式 → 一般解 → 特解の順に解くこと)．

[3]　図のように水平に置かれた滑らかな板の上の高さ h の位置から長さ $l\ (< h)$ の糸をつけた質量 m の粒子を，毎秒 n の回転数で板上を等速円運動させておく．粒子が板を離れる最小の回転数はいくらか (ヒント：鉛直方向の力の釣り合いの式と水平面上での円運動の運動方程式を使う．円の半径を r，回転の速さを v とすると $n = v/2\pi r$)．



[4]　ケプラーの法則によると，太陽と惑星を結ぶ線 (動径) が描く面積速度は一定で，惑星の公転周期の 2 乗は軌道の長半径の 3 乗に比例し，この比例定数 k は全ての惑星に対して共通の値になる．惑星の軌道を円で近似して，これとニュートンの運動方程式から惑星に作用する力の法則を考える．

(a) 惑星に作用する力を2次元極座標で表すとき，$F_\theta = 0$ になることを説明せよ．

(b) 惑星 (質量 m) の軌道半径を r，公転周期を T とするとき F_r が r^{-2} に比例することを示せ．また，$4\pi^2/k = GM$ (M は太陽の質量，G は比例定数) とおいて，F_r を求めよ．

(c) 太陽から見た惑星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき，(a)(b) の力をベクトルで表わせ．

(d) ニュートンは (c) の力を一般化しての万有引力の法則を発見した．この「一般化」の内容を説明せよ．

(e) 地球の質量を M，半径を R とするとき，地球表面上の重力加速度を g を万有引力の法則を使って求めよ．

[5] 地球の半径を $R = 6380$ km，地球表面上での重力加速度を $g = 9.80$ m/s^2，月の公転半径を $r_1 = 60.3R$ として，次の問いに答えよ．$\pi = 3.14$ とする (関数電卓の π は使わないこと !)．数値は，式を求めてから最後に代入すること．

(a) 月の公転周期 T_1 は何日か．

(b) 地球の公転半径を $r_2 = 2350R$，その公転周期は $T_2 = 365$ 日とする．地球の質量 M_1 と太陽の質量 M_2 の比を求めよ．

(c) 万有引力定数を $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/kg·s^2 (この値を他の設問では使わないこと) とするとき，地球と太陽の質量 M_1，M_2 を求めよ．

[6] 質量 m の粒子が外力 $\boldsymbol{F}$ の作用をうけて運動している．粒子は，時刻 t_A に点 A にあり，曲線 C に沿って移動して時刻 t_B に点 B にあるとする．

(a) 粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とするとき，点 A から点 B までの間に粒子におこなう仕事 $W_{A\to B}$ の定義式を書け．

(b) 粒子の速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とするとき，運動エネルギー T の定義式を書き，運動方程式から 次の式を導け．

$$T(t_B) - T(t_A) = W_{A\to B}$$

(c) 上の左辺の運動エネルギー T と右辺の仕事 W の定性的な違いを次のキーワードを使って説明せよ．ただし，２つのキーワード の意味を説明すること．
[キーワード ：属性，外的量]

(d) 粒子が 2 次元平面内の原点 O から，点 P (2, 4) まで $y = x^2$ に沿って移動するとき，復元力 $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$，$k = 2.0$ kg/s^2 のする仕事 $W_{O\to P}$ を求めよ．

(e) 5 m/s の速さで運動している質量 2 kg の粒子を 10 m/s の速さにするために，外から行う仕事を求めよ．