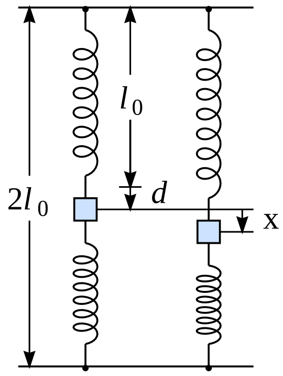
第 3 学年 応用物理 後期中間試験 (2007.12.12)

注意　問題の番号を (a)(b)(c)... まで必ず書き，答案の区切りを明確にする．答案はすべて答案用紙に記入し，解答を得る過程を省略しない．解答を得るのに必要な図は必ず答案用紙に記入する．答案用紙は表と裏を使い，不足する場合は手を上げて請求する．地上での重力加速度は g とする．ベクトルとスカラーの記号を明確に区別する．

数値を求める問題での注意　式を導出してから最後に数値を代入すること．単位を付けること．電卓の π は使わないこと．

[1]　図のように，自然長 l_0 の 2 本のバネの間に，質量 m の小さなおもり (大きさは考えない) をつけ，高さ $2l_0$ の天井と地上にその両端を固定する．バネの弾性定数を k とする．

(a) 力のつり合いの状態における上のバネの伸び d (下のバネの縮みと等しい) を求めよ．



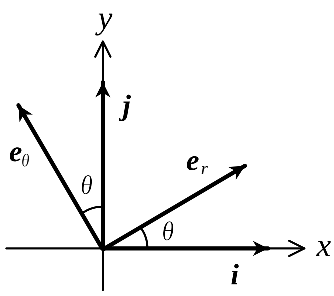
(b) おもりが静止位置から x だけ下方にあるとき，おもりに作用する力 F を求めよ．ただし，下向きを正とし，k を用いて表わすこと．

(c) おもりを上下に振動させる．$x = a$ まで引っ張り時刻 0 に静かに放すとき，時刻 t での位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ を求めよ．

(d) この振動の振幅は何か．また，振動の周期 T を m と k を用いて表せ．

[2]　2 次元極座標で，半径 r の円周上の粒子の運動を考える．

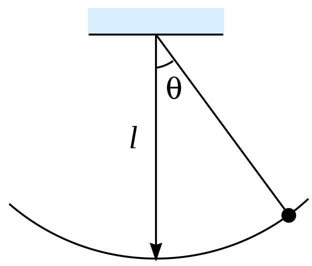
(a) 左図を用いて 2 次元極座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ を直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ でそれぞれ表し，$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ および $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ を示せ．



(b) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ から加速度を求め，加速度の成分が $a_r = -r\dot{\theta}^2$，$a_\theta = r\ddot{\theta}$ になることを示せ．

(c) a_r および a_θ をそれぞれ r と円周上の速度 $v(= r\dot{\theta})$ を使って表わせ．

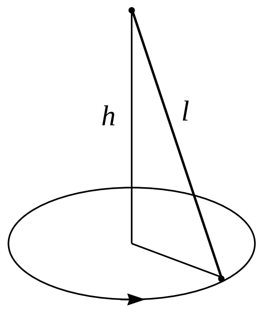
[3]　図のように，天井に一端を固定した長さ l の糸の他端に質量 m の小さなおもりをつけてつるす．おもりを押さえて $\theta = \theta_0$ にし，$t = 0$ に静かに放す．



(a) 糸の張力の大きさを T として，力の入った図を描き，極座標での運動方程式の各成分を書け．

(b) 振り子の振幅が小さいとき，θ の 1 次近似の運動方程式を書き，その解 $\theta(t)$ を求め (注意：運動方程式 → 一般解 → 特解の順に解くこと)，周期が $2\pi\sqrt{l/g}$ となることを示せ．

[4] 図のように水平に置かれた滑らかな板の上の高さ h の位置から長さ $l\,(> h)$ の糸をつけた質量 m の粒子を，毎秒 n の回転数で板上を等速円運動させておく．



(a) 糸の張力の大きさを T，板からの垂直効力の大きさを R，回転半径と速度を r，v として，図を描き，粒子の鉛直方向の力の釣り合いの式と円運動の動径方向の運動方程式を書け (注意：問題に与えられた文字のみで表すこと).

(b) 粒子が板を離れる最小の回転数を求めよ (注意：定数のみで表すこと).

[5] ケプラーの法則によると，太陽と惑星を結ぶ線 (動径) が描く面積速度は一定で，惑星の公転周期の 2 乗は軌道の長半径の 3 乗に比例し，この比例定数 k は全ての惑星に対して共通の値になる．惑星の軌道を円で近似して，これとニュートンの運動方程式から惑星に作用する力の法則を考える．

(a) 惑星に作用する力を 2 次元極座標で表すとき，$F_\theta = 0$ になることを説明せよ．

(b) 惑星 (質量 m) の軌道半径を r，公転周期を T とするとき F_r が r^{-2} に比例することを示せ．また，$4\pi^2/k = GM$ (M は太陽の質量，G は比例定数) とおいて，F_r を求めよ．

(c) 太陽から見た惑星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき，(a)(b) の力をベクトルで表わせ．

(d) ニュートンは (c) の力の適用範囲を拡大して万有引力の法則を確立した．このことを簡単に説明せよ．

(e) 地球の軌道の長半径を 1.496×10^{11} m, 公転周期を 365 日．太陽の質量を 1.99×10^{30} kg, $\pi = 3.14$ とするとき，定数 G を求めよ．

[6] **(a)** 地球表面上で周期 0.5 秒の単振り子を月面上にもっていったら，その周期 ([3](b) を参照) はいくらになるか．ただし，地球と月の半径の比は 11 : 3，質量の比は 81 : 1 とする．

(b) 月の公転周期 $T = 27.2$ 日，地球の半径 $R = 6370$ km，地上での重力加速度 $g = 9.81$ m/s^2，円周率 $\pi = 3.14$ として，月の軌道半径 r を求めよ (注意：この問題で与えた数値以外を用いないこと).

[7] 質量 m の粒子が外力 $\boldsymbol{F}$ の作用をうけて運動している．粒子は，時刻 t_A に点 A にあり，曲線 C に沿って移動して時刻 t_B に点 B にあるとする．

(a) 粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とするとき，点 A から点 B までの間に粒子におこなう仕事 $W_{A\to B}$ の定義式を書け．

(b) 粒子が原点 O から点 P ($|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = a$ とする) まで 2 点を結ぶ直線に沿って移動するとき，復元力 $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$ (k は正の定数) のする仕事 $W_{O\to P}$ を求めよ．