

第5章

GLMの尤度比検定と 検定の非対称性

「検定」ってそんなにエライの？

この章でやること

統計モデルによる推測・予測を重視

検定

統計モデルを比較する方法のひとつ

どのような統計モデルでも利用可能な

尤度比検定を取りあげます。

(統計モデルの検定)

ゆう ど

尤度比検定

- 尤度比をあつかう検定 $\frac{L^*_1}{L^*_2}$
→ 逸脱度(deviance)の差に注目する
- どんな統計モデルでも、最尤推定法でパラメータを推定していれば検定できる

※どんな確率分布でもOK.

ノンパラの検定はこの本では使わない

5.1 統計学的な検定のわくぐみ

統計モデルの検定
(尤度比検定)

モデル選択(AIC)



解析対象のデータを確定



目的とデータ構造に対応した適切な統計モデルを設計

(帰無仮説・対立仮説)

(単純モデル・複雑モデル)

目的とデータ構造に対応した 適切な統計モデルを設計

(帰無仮説・対立仮説)

(単純モデル・複雑モデル)



パラメーターを最尤推定計算



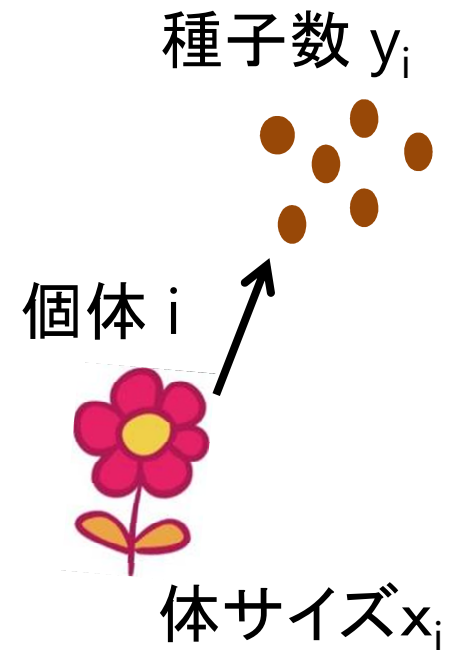
帰無仮説棄却の危険率
から
帰無仮説棄却の可否を判断



AICの評価から
予測の良いモデルを選ぶ
($-2\log L^* + 2k$)

5.2 尤度比検定の例題 : 逸脱度の差を調べる

$\lambda = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$
を平均とするポアソン分布のGLM



- 一定モデル

種子数の平均 λ_i が定数のモデル($\beta_2=0, k=1$)

↳ 帰無仮説

- xモデル

種子数の平均 λ_i が体サイズに依存するモデル($\beta_2 \neq 0, k=2$)

↳ 対立仮説

ゆう ど

尤度比検定 ……尤度比をあつかう

$$\frac{L^*_1}{L^*_2}$$

$$\frac{L^*_1}{L^*_2} = \frac{\exp(-237.6) \text{ (一定モデルの最大尤度)}}{\exp(-235.4) \text{ (xモデルの最大尤度)}}$$



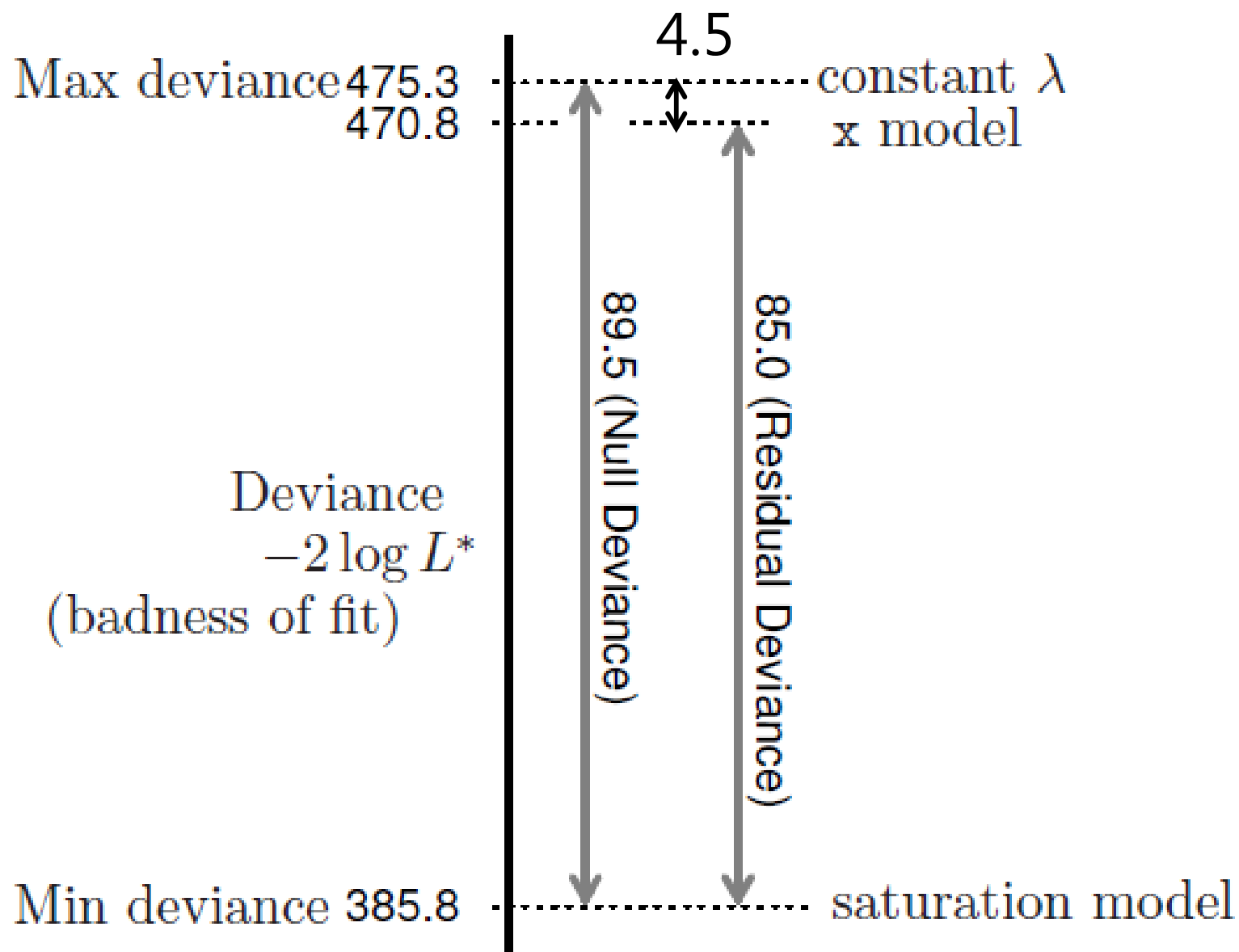
$$\begin{aligned}\Delta D_{1,2} &= -2(\log L^*_1 - \log L^*_2) \\ &= \underline{D_1 - D_2}\end{aligned}$$

尤度比を逸脱度の差に変換して
検定統計量とする

例題の結果を見てみましょう

Model	k	$\log L^*$	Deviance $-2\log L^*$	Residual deviance	AIC
一定モデル	1	-237.6	475.3	89.5	477.3
xモデル	2	-235.4	470.8	85.0	474.8
フルモデル	100	-192.9	385.8	0.0	585.8

4.5 $\updownarrow$



$\Delta D_{1,2}=4.5$ というのは...

一定モデルに比べて、xモデルでは
あてはまりの悪さである逸脱度が4.5改善された



「 $\Delta D_{1,2}=4.5$ は、ほんとうに改善されたの？」

これを確かめるために...

- ① 汎用性のあるパラメトリック ブートストラップ法
(PB法)
- ② χ^2 分布を使った近似計算法

具体的な方法は
5.4でやります

5.3 2種類の過誤と統計学的な 検定の非対称性

Neyman-Pearsonの検定のわくぐみ

帰無仮説

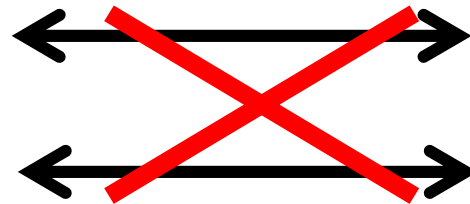
対立仮説

正しい

正しくない

正しくない

正しい



まず帰無仮説が真のモデルかどうか注目

逸脱度の差 $\Delta D_{1,2}=4.5$ というのは...

↓ 帰無仮説が

「めったにない差」
(帰無仮説を棄却)

「よくある差」
(棄却できない)

真のモデル

第一種の過誤

OK

真のモデルでない

OK

第二種の過誤

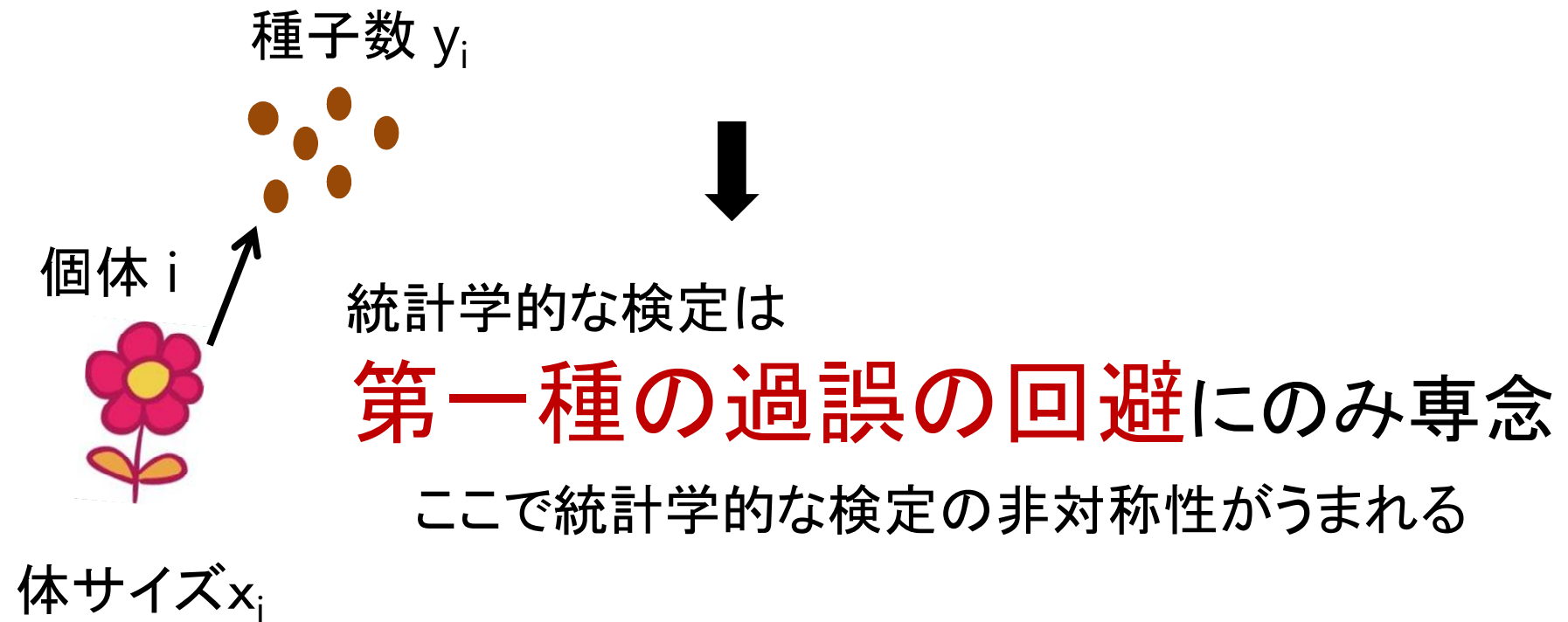
- 第一種の過誤

逸脱度の差 $\Delta D_{1,2}=4.5$ も！ めったにない差だ！
帰無仮説が正しくないと誤って判断すること

- 第二種の過誤

逸脱度の差 $\Delta D_{1,2}=4.5$ しかない！ よくある差だ！
一定モデルが◎、xモデルは意味なく複雑と誤って判断すること

二つの過誤を同時に検討するのはめんどくさい...



第一種の過誤をおかす確率を p 値とした

ちなみに...第二種の過誤に注目した方法もあります。

逸脱度の差 $\Delta D_{1,2} = 4.5$ というのは...

↓ 帰無仮説が

「めったにない差」
(帰無仮説を棄却)

「よくある差」
(棄却できない)

真のモデル

第一種の過誤

OK

真のモデルでない

OK

第二種の過誤

検出力 $(1 - p_2)$

帰無仮説が間違っていた時に棄却できる確率

→ 高めるにはサンプルサイズを大きくする

5.4 帰無仮説を棄却するための 有意水準

一定モデル



xモデル

逸脱度の差が $\Delta D_{1,2} \geq 4.5$ の確率 p

$p \geq \alpha$: 帰無仮説は棄却できない

$p < \alpha$: 帰無仮説は棄却できる

α = 有意水準: 「**第一種の過誤**」を犯す確率を
どの程度までなら許容するか
0.05がよく使われている

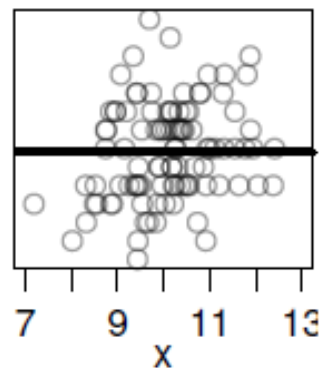
注) p 値の大きさ $\neq$ 効果の大きさそのもの

尤度比検定の流れ

- ①帰無仮説である一定モデルが正しいと仮定
- ②観測データを一定モデルに当てはめて得られた β_1 は真のモデルとほぼ同じと考える
- ③真のモデルからデータを何度も作成し、 $\beta_2=0$ 、 $\beta_2 \neq 0$ のモデルにあてはめてたくさんの $\Delta D_{1,2}$ を得る
- ④そうすれば、 $\Delta D_{1,2} \geq 4.5$ となる確率 p も評価できる！

③ 真のモデルからデータを何度も作成し、 $\beta_2=0$, $\beta_2 \neq 0$ のモデルにあてはめてたくさんの $\Delta D_{1,2}$ を得る

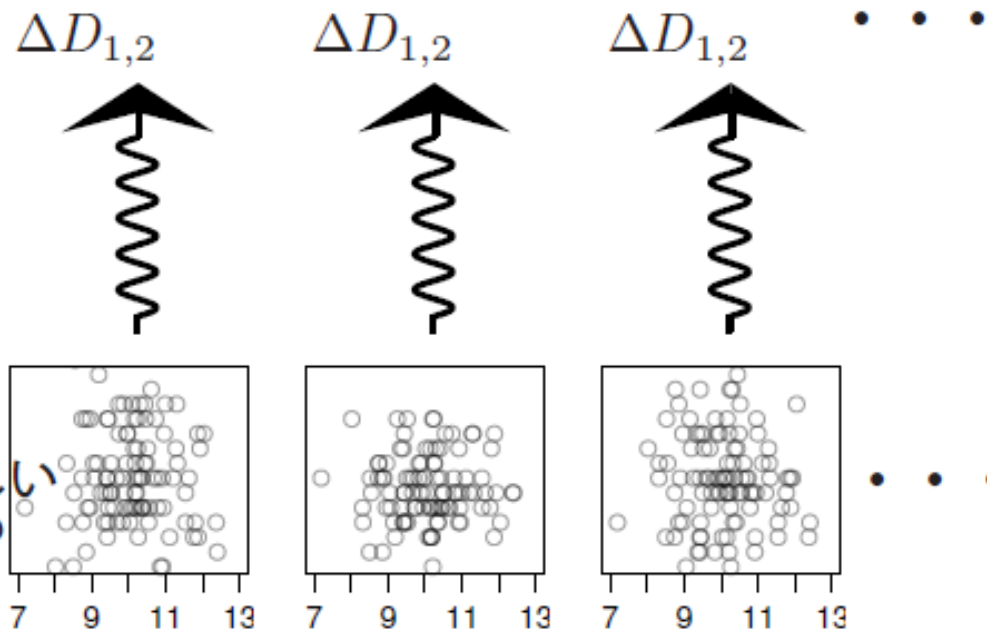
帰無仮説が真の統計モデル
ということにしてしまう
($\hat{\beta}_1 = 2.06$ のポアソン分布)



帰無仮説のモデルから新しい
データをたくさん生成する



評価用データに constant λ と x model
をあてはめて逸脱度差 $\Delta D_{1,2}$ の分布を予測



あてはまりの良さ評価用のデータ (多数)

p 値を評価する具体的な方法

① 汎用性のあるパラメトリック ブートストラップ法 (PB法)

② χ^2 分布を使った近似計算法

	調査した 個体数	計算量
①	少	多
②	多	少

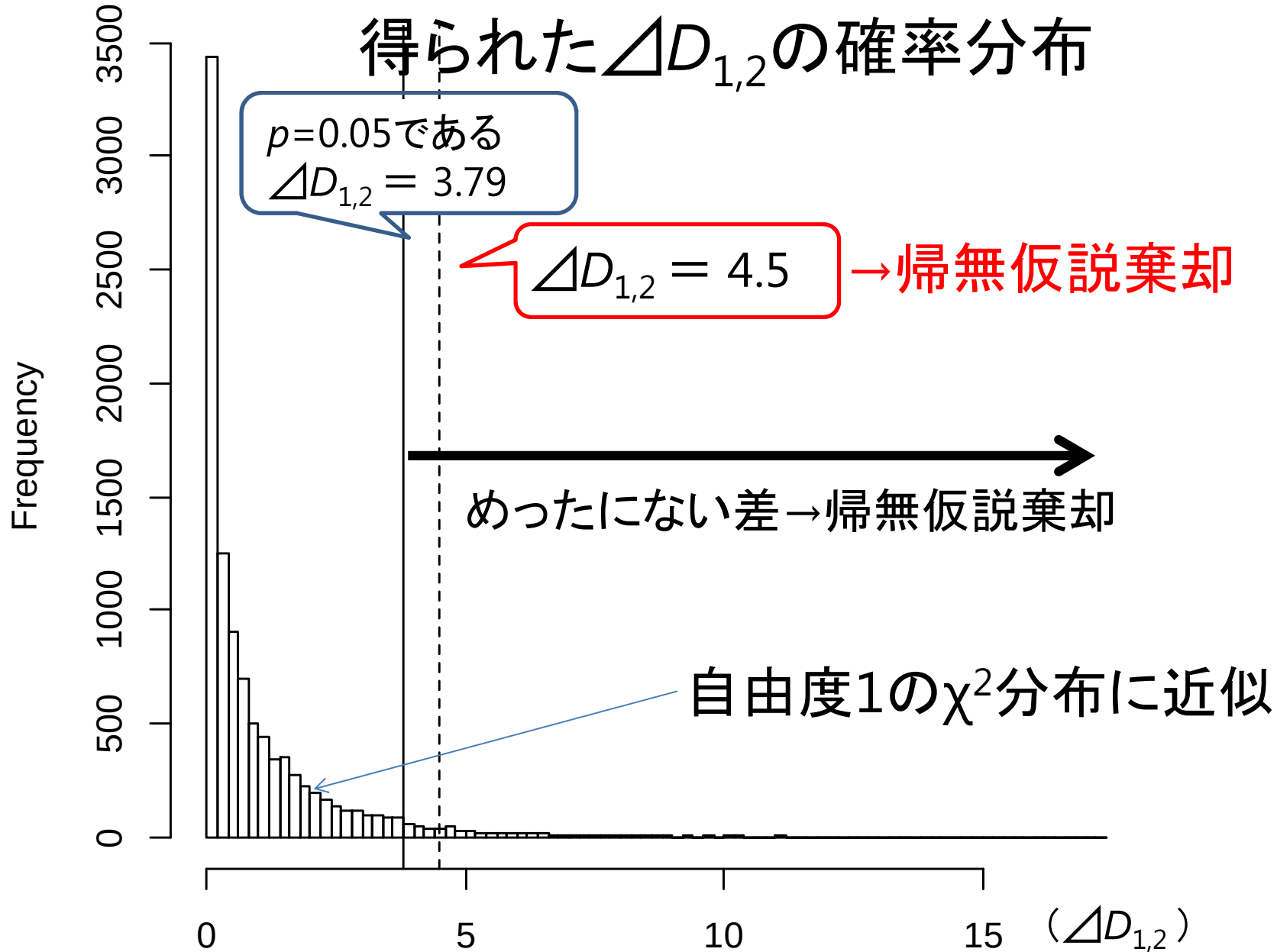
5.4.1 汎用性のあるPB 法



③真のモデルからデータを何度も作成し、 $\beta_2=0$, $\beta_2 \neq 0$ のモデルにあてはめてたくさんの $\Delta D_{1,2}$ を得る

これを観測されたデータをもとに、乱数発生 of シミュレーションによってたくさんの $\Delta D_{1,2}$ を得て実施する方法

乱数発生シミュレーションによって 得られた $\Delta D_{1,2}$ の確率分布



5.4.2 χ^2 分布を使った近似計算法

$\Delta D_{1,2}$ の確率分布は自由度1の χ^2 分布に近似

このことを利用し、近似計算をすることで
先ほどよりも手軽に尤度比検定できる！

とってもお手軽！



5.5「帰無仮説を棄却できない」 ≠「差がない」

$p < 0.05$: 帰無仮説は棄却できる

⇒ 残された対立仮説を採択しよう

どのような意味でいいモデルなのか明確でない

$p \geq 0.05$: 帰無仮説は棄却できない

≠ 帰無仮説は正しい

⇒ 判断を保留するしかない

5.6 検定とモデル選択, そして 推定された統計モデルの解釈

統計モデルの検定
(尤度比検定)



帰無仮説の
安全な棄却

モデル選択 (AIC)



よい予測をする
モデルの探索

目的

推定された統計モデルが、現象の挙動を
どのように予測してるかも確認すべき