P35 (5.7)

$$\begin{cases} \log_a xy = \log_a x + \log_a y & \cdots ① \\ \log_a a = 1 & \cdots ② \\ \log_a x^p = p\log_a x & \cdots ③ \\ \log_a 1 = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$ を示せ。 $(x, y > 0)$

$f(x) = a^x$ の逆関数を $\log x$ とおいて

$y = \log_a x \ (x > 0) \Leftrightarrow x = a^y \ \cdots (*)$

また、(*) より $\log_a a^x = x \ \cdots (\star)$

①の証明

$x = a^X$, $y = a^Y$ とおくと、

$\log_a a^X a^Y = \log_a a^{X+Y} = X + Y = \log_a x + \log_a y$

($\because (\star)$) ($\because (*)$)

②の証明

$\log_a a = u$ とおくと、(*) より $a = a^u \quad \therefore u = 1$

③の証明

$\log_a x = u$ とおくと、(*) より $x = a^u$

$\log_a x^p = \log_a a^{pu} = pu = p\log_a x$

($\because (\star)$)

④の証明

$\log_a 1 = h$ とおくと、(*) より $1 = a^h$

定義より $a^0 = 1$ なので、 $h = 0$