演習問題 3－6　p91

3. 次の不等式を証明せよ.

(1) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}<e^{-x}$

$<1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(x>0)$

(2) $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ $(x\neq 0)$

(3) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

[証] (1) $x>0$ において，テイラーの定理 →P80
を，$a=0$ として用いると

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+e^{-\theta x}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$(0<\theta<1)$

したがって

$$0<e^{-\theta x}\frac{x^{2n}}{(2n)!}<\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ から

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}<e^{-x}$$

$$<1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ (証明終わり)

(2) $f(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$ とおくと，
$f(x)$ は偶関数なので
$x\geq 0$ で考えてよく，
$f'(x)=x-\sin x$，
$f''(x)=1-\cos x\geq 0$ より
$f'(x)$ は単調増加で，
$f'(x)\geq f'(0)=0$
よって $f(x)$ も単調増加で
$f(x)\geq f(0)=0$
以上より　$x\neq 0$ において
$1-\frac{x^2}{2}<\cos x$ …① が成立

また，$g(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cos x$ とおくと，
$g(x)$ も偶関数で，$x\geq 0$ において
$g'(x)=-x+\frac{x^3}{3!}+\sin x$
$g''(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=f(x)\geq 0$

よって $g'(x)$ が単調増加で，
$g'(x)\geq g'(0)=0$
より $g(x)$ も単調増加で，
$g(x)\geq g(0)=0$
以上より，$x\neq 0$ において
$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ …② が成立
①，② より　$x\neq 0$ において
$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ (証明終わり)

(3) [$\sin x<x$ は (2) の途中にあるので省略します]
$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$
とおくと，
$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$

$\cos\alpha=\frac{2}{\pi}$ とおく $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ と，
右の増減表より
$f(x)>0$

x	0 …	α	…	$\frac{\pi}{2}$
f'		+	0	−
f	0	↗		↘ 0

$\therefore$ $\frac{2}{\pi}x<\sin x$

以上あわせると，$0<x<\frac{\pi}{2}$ において
$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ (証明終わり)