演習問題 3-6　p91

4, $a_1, \cdots, a_n$ を互いに異なる実数とするとき，方程式

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}=0$$

は $(n-1)$ 個の異なる実根をもつことを証明せよ．

[証] $f(x)=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}$

とおくと，

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-a_1)^2}-\frac{1}{(x-a_2)^2}-\cdots-\frac{1}{(x-a_n)^2}$$

$\therefore f'(x)<0$

したがって $f(x)$ は単調減少で，

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to a_k-0} f(x)=-\infty \quad (k=1,2,\cdots,n)$,

$\lim_{x\to a_k+0} f(x)=+\infty$

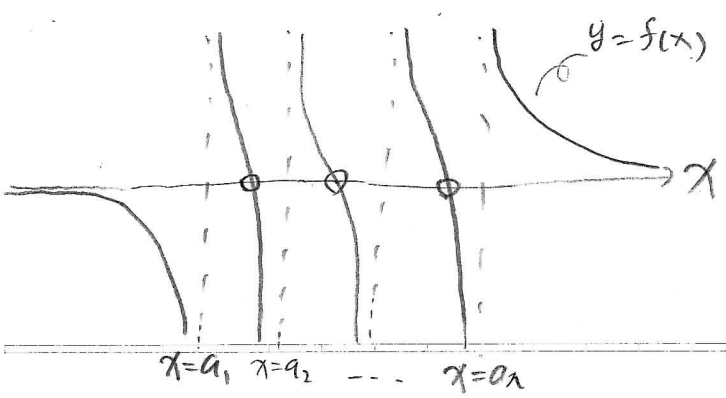
とから

$a_k<x<a_{k+1} \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$

に $f(x)=0$ となる x が1つだけ存在する．$a_1,\cdots,a_n$ は互いに異なるから，以上より

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}=0$$

は $(n-1)$ 個の異なる実根をもつ ---（証明終わり）



5, $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$

が $x=a$ において

$f(a)\geq 0, f^{(1)}(a)\geq 0, \cdots, f^{(n)}(a)\geq 0$

を満たすとき，方程式 $f(x)=0$ は a より大きい実根を持たないことを証明せよ．

[証] $f^{(n)}(x)=a_0 n!$ より

$f^{(n)}(a)=a_0 n!\geq 0$

$\therefore a_0\geq 0$

ところが，$a_0\neq 0$ だから

$a_0>0$

したがって，$f^{(n)}(x)>0$ より

$f^{(n-1)}(x)$ は単調増加で，

$x>a$ において，

$f^{(n-1)}(x)>f^{(n-1)}(a)\geq 0$ だから

$f^{(n-1)}(x)>0 \quad (x>a)$

以下同様に繰り返していくと，

$f(x)>0 \quad (x>a)$

となるから，以上より

方程式 $f(x)=0$ は a より大きい実根を持たない ---（証明終わり）

〈コメント〉

みなさんここらへんは強いはずなので，どうぞお好きに解いて下さい。

ココが変だぞ！ってのがありましたら，お願いします。