演習問題 3-6　P91

NO.
DATE

6. 次の関数 $f(x)$ の極値を求めよ

(1) $f(x)=x^x$　(2) $f(x)=e^{-x}\sin x$

[解]

(1) $f(x)=x^x\ (>0)$ は $x>0$ で定義されるので，

$\log f(x)=x\log x$ から

$f'(x)=(\log x+1)x^x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ で，

$f'(x)<0\ (0<x<\frac{1}{e})$，

$f'(x)>0\ (\frac{1}{e}<x)$

とから

$f(x)$ は $x=\frac{1}{e}$ で極小かつ最小

∴ 極小値 $f(\frac{1}{e})=(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$ …(答)

(2) $f(x)=e^{-x}\sin x$ から

$f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=\sqrt{2}e^{-x}\sin(x+\frac{3}{4}\pi)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

∴ $\frac{\pi}{4}+2n\pi<x<\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$ のとき

$f'(x)<0\quad (n\in\mathbb{Z})$ で，

$\frac{\pi}{4}+(2n-1)\pi<x<\frac{\pi}{4}+2n\pi$ のとき

$f'(x)>0$ であるから，

求める $f(x)$ の極値は，$n\in\mathbb{Z}$ として

$x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ のとき

極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(2n+\frac{1}{4})\pi}$，

$x=\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi$ のとき

極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(2n+\frac{5}{4})\pi}$ …(答)

〈コメント〉

$\mathbb{Z}$ とは整数のことです。ここらへんは高校の範囲なので，むしろ載っける必要はないでしょうが，一応載っけときます。

KOKUYO