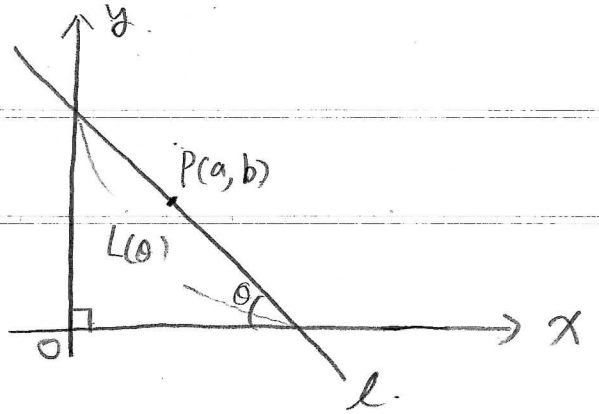
演習問題 3-6　p91

7.



[解] Pを通る直線 l の第一象限内部にある長さ $L(\theta)$ が最小となるのは、l の傾きが負であるときの場合で考えてよく、上図のように

θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ をとると、

$$L(\theta)=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}$$

$$\therefore L'(\theta)=\frac{a\cos^3\theta\left(\tan^3\theta-\frac{b}{a}\right)}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$(a>0,\ b>0)$

$\tan\theta=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ となる θ を γ $(0<\gamma<\frac{\pi}{2})$

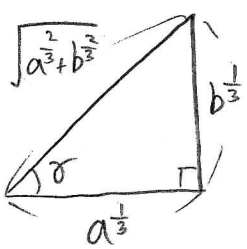
とおくと、増減表は下のとおり

θ	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
L'		−	0	+	
L	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

よって $L(\theta)$ は $\theta=\gamma$ のとき極小かつ最小で

$$\cos\gamma=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\sin\gamma=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$$



から

最小値 $L(\gamma)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ …(答)

8.

[証] $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqq\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ $(a_j\geqq0)$ … (☆)

$n=1$ のとき

$a_1\leqq a_1$ より (☆) は成立する

ある n で (☆) が正しいとする

いま、$f(x)=-\log x$ $(x>0)$ は

$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ より

凸関数であるから、

$f(ta+sb)\leqq tf(a)+sf(b)$ $(t,s>0,\ t+s=1,$ 等号成立は $a=b$ のとき)

を用いて、

$$\log\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}=\log\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_n}+\log\sqrt[n+1]{a_{n+1}}$$

$$=\frac{n}{n+1}\log\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\frac{1}{n+1}\log a_{n+1}$$

$$\leqq\log\left(\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)$$

$$\leqq\log\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\right)\ (\because(☆))$$

したがって $\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_{n+1}}\leqq\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{n+1}$ となり

(☆) は $n+1$ のときでも正しい、

以上より、数学的帰納法から

(☆) は示された　---(証明終わり)