演習問題 3-6 p91

1. ロピタルの定理より、

(1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{x - \log x - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(\log x + 1)x^x - 1}{1 - \frac{1}{x}}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{(\log x+1)^2 x^x + x^{x-1}}{\frac{1}{x^2}}$

$= 2$ ---(答)

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{6} \dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{1}{6}$ --(答)

(3) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{e^x}$

$= \lim_{x\to +\infty} \dfrac{2}{e^x}$

$= 0$

よって

$\lim_{x\to +\infty} (e^x \log x - x^2) = \lim_{x\to +\infty} e^x \left(\log x - \dfrac{x^2}{e^x}\right)$

$= +\infty$ --(答)

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{\tan x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x} x - \tan x}{x^2}}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(1+\tan^2 x)x - \tan x}{2x^2 \tan x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(2\tan x \frac{1}{\cos^2 x})x + 1 + \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}}{4x\tan x + \frac{2x^2}{\cos^2 x}}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\tan x}{x}}{2\frac{\sin x}{x}\cos x + 1}$

$= \dfrac{1}{3}$

したがって

$\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$ ---(答)

(5) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x\right)}{x}$ → p55

$= \lim_{x\to +\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x}$

$= \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = 0$

したがって

$\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1} x\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ ---(答)

(6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log \frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}}{\frac{x}{n}}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{n}{a_1^x + \cdots + a_n^x} \cdot \frac{a_1^x \log a_1 + a_2^x \log a_2 + \cdots + a_n^x \log a_n}{n}}{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{x\to 0} \log a_1 a_2 \cdots a_n$

したがって

$\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{2}{x}} = a_1 a_2 \cdots a_n$ ---(答)

KOKUYO