多世界解釈の量子力学

八尋秀一

２０１７年2月１７日

Part I
基礎

1 Introduction

量子力学は、EPR パラドックスに始まる数々の疑問を抱えたまま現在に至っている。１９８０年代のアスペの実験においてエンタングルした量子系の不可思議な挙動が報告された。追実験が数多く行われた結果、Bell の不等式は破れていることがわかり、量子力学の予測は正しく、普通の隠れたパラメータ理論は完全に否定された。しかしながら、隠れたパラメータ理論の特殊な一つとされる量子ポテンシャルを導入したボームの理論は否定されずに残っている。そもそも、波動性と粒子性を同時に満たすことを理解することは非常に困難であり、その理解を棚上げにしたまま量子力学理論が展開されてきた歴史的事実がある。量子力学の根源を考えてはいけない。量子力学を学ぶ者はそのように言われながら、数式を使って計算することに没頭させられた。しかし、多くの人の心の中になにがしかのわだかまりを残しながらである。考えるな、ただただ計算せよ、である。最近、２０１０年代に入って、場の量子論がいくらか進み、エンタングルした系の理論が提出され、場の量子論が正しいのだとされるようになってきた。１００年以上に亘って人々の心にわだかまっていたものに終止符を与えたもののようにも見えるが、問題の本質をより難しい理論に組み込むことで単に棚上げにしたにすぎないようにも思える。エンタングルした系の不可思議さは常識的思考と鋭く乖離している。場の量子論は水素原子の計算において完全に正しい結果を予測することができる唯一の理論であるが（ラムシフトは一般の量子力学でも Dirac 方程式でも導くことができなかったが、場の量子論によって初めて正確に計算された。)、波を基本に考える学派と粒子を基本におく学派が存在するらしいが、私自身はあまりよく勉強していないのであるが、粒子の生成と消滅を取り扱いながら、古典的粒子の軌道はもともと否定しているため、最初から空間的に広がった状態粒子の概念が存在しているため、粒子性はすでに古典的ではない。そのため、観測問題はいまだに謎のままであると思われる。

量子力学を多世界解釈の観点から再構築してみようと思う。ただし、私独自の多世界解釈なので、波束は収束しないというエベレットからドイッチュの流れの多世界解釈とはいくらか異なっているので、その点はご容赦願いたい。波束の収束を多世界の選択へと置き換えた実質的には量子力学と結果は同じであるが、ある意味、直感にわかりやすい、そして正しいとされる量子力学と同じ結果を与える解釈である。私自身は、本当に多世界もしくは平行世界があると信じているわけではないが、現実世界はこんなにも奇妙な世界であることを、そしておそらく、我々の理論は未完成で、近い将来、きっと、理解可能な新しい理論が生まれ

るに違いないということを信じながら、今だに数学や実験方法が未熟であるために、窮余の策としての多世界解釈を導入しているに過ぎないと思っている。現実世界は量子力学によって記述され、計算することができるが、その根本理論は誰もよくわかっていない。とても不可思議な現実に人類は直面しているが、なぜか、現象を記述する数式だけは存在している。多世界解釈は、このジレンマへの対処と直感に訴える理解しやすさを与えると同時に、近い将来に完成されるであろう新しい理論が包含しなければならない様々な解決への糸口を与えてくれるものと考えている。

量子力学では、記憶を消去されれば干渉しなくなるという表現をよく見かける。何とも奇妙な話で、粒子が記憶しているのか、それとも、観測者の記憶が消去されるのかよくわからない表現である。多世界解釈であれば、多世界の分離と結合が行われ、干渉したり、干渉しなくなったりする現象を理解することができる。観測は膨大な多世界の中の断片を切り取る現象であり、観測後の断片同士をつなぎ合わせて元に戻すこともある意味部分的にではあるが可能である。波束が部分的にしか収束しない状況下においては、波束の収束の意味が不明瞭であるが、多世界間の分離と結合で考えれば、すべては明瞭になってくる。

1.1 波動関数と波動方程式

アインシュタインの光量子は $E = h\nu$ であり、ドブロイの理論から物質波の波長は $\lambda = h/p$ であり、波の方程式は

$$\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \tag{1}$$

で与えられる。ここで、s は速度（位相速度）、u は一般的波の振幅を与える関数である。シュレーディンガーはこの波の方程式とアインシュタイン、ドブロイの式から、シュレーディンガー方程式なるものをひょんなことから導き出した。単に式をこねくり回しただけである。

当時、ドブロイはパイロット波を提唱し、物質波の振動数 $\nu = E/h$ で与えられ、$E = mc^2$ で与えられるところのエネルギー値に対応した振動数を持つと考えた。しかし、波の速度 $= \lambda\nu$ が光の速度を超えるため、光速度を超えるものは存在できないとする相対性理論と矛盾することから、物理学の主流からパイロット波の概念は外れることになった。現在では外部ポテンシャルのない自由粒子の場合、運動エネルギーが振動数を決めるとされている。（その後、ボームがパイロット波を導入した非主流の量子力学を提唱するまで日の目をみることはなかったが、やはり現在でも非主流の量子力学として考えられている。）

さて、物質波は $\lambda = h/p$ で与えられるところの単一周波数の波と考えられる。一般の x 方向に進む進行波は、$\sin(2\pi x/\lambda - 2\pi\nu t)$ の正弦関数で表現される。数学的には複素数表現が便利なので、

$$u(x,t) = e^{2\pi i(x/\lambda - \nu t)}$$

と表現することにする。複素数そのものにあまり意味はなく、等価な解が得られることからその便利性のため導入されたのであるが、後になって、複素数そのものに意味があるようになったことは記しておかねばならないであろう。この式の時間に関する 2 階微分をとると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{-2\pi i\nu e^{2\pi i(x/\lambda - \nu t)}\right\} = -4\pi^2\nu^2 u \\ &= -2\pi i\nu\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

を得る。$s = \lambda\nu$ を導入すると、波の方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{\lambda^2\nu^2}(-2\pi i\nu)\frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{-2\pi i}{\lambda^2\nu}\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

さて、ここで、$\nu = E/h$、$\lambda = h/p$ を使うと、

$$= \frac{-2\pi i p^2}{hE}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

を得る。質量 m の直線運動する電子を考えると、$E = \dfrac{p^2}{2m}$ であるから、$p^2 = 2mE$ なので、

$$\frac{-4\pi i m}{h}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

を得る。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\lambda^2\nu^2}4\pi^2\nu^2 u \\ &= -\frac{4\pi^2 p^2}{h^2}u \\ &= -\frac{8\pi^2 mE}{h^2}u \end{aligned}$$

よって、エネルギー E にスケールを合わせると、

$$\begin{aligned} -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Eu \\ = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{-4\pi i m}{h}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta u \\ \frac{hi}{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta u \end{aligned}$$

が得られる。ここで、$\hbar = h/2\pi$ を導入すると、

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u = Eu$$

を得る。全エネルギーが運動エネルギーのみの直線運動する粒子の式が得られた。ここで、運動エネルギー $T \to -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ と考えると、ポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ の場の中を運動する粒子の場合、$E = T + V$ で与えられるので、

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(\boldsymbol{x})u = Eu$$

が成立するであろうことが当然考えられる。

$$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(\boldsymbol{x})u = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right\}u$$

が時間発展のシュレーディンガー方程式である。

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right\}u = Eu$$

が定常状態のシュレーディンガー方程式である。これらの式の導出に論理的根拠はまったくない。しかし、なぜか実験結果と一致するので、現在でも正しいとされている。（実際には相対論効果の補正を入れないと完全には一致しないが。）ところで、ここでの式の導出はシュレーディンガーの方法とは全く異なるので、注意を願いたい。その当時のことを思い描きながら、私独自の簡単な導出を演出してみただけである。

通常の波の振幅を表す関数として u を導入したが、物質波の波は通常の波とは異なるので、ψ を用いることが一般的である。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right\}\psi \tag{2}$$

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right\}\psi = E\psi \tag{3}$$

また、ハミルトニアン $\mathscr{H}$ を導入し、

$$\mathscr{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathscr{H}\psi \tag{5}$$

$$\mathscr{H}\psi = E\psi \tag{6}$$

と一般的には表現される。N 粒子系の場合、

$$\mathscr{H} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i + V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \tag{7}$$

と拡張される。（非相対論）

1.2 波動関数の確率解釈

ボルンによると、波動関数の絶対値の二乗は、その座標での粒子の存在確率を与えるとした。複素数表現の 1 次元の進行波 $u(x,t) = e^{2\pi i(x/\lambda - \nu t)}$ の絶対値の二乗は、

$|u(x,t)|^2 = u^* u = 1$ で時間や空間に依存せずにすべて同じ存在確率を与えるが、$\sin(2\pi x/\lambda - 2\pi\nu t)$ の絶対値の二乗は $\sin^2(2\pi x/\lambda - 2\pi\nu t)$ なので存在確率が時間や空間に依存して激しく振動している。複素数表現は粒子の均一な存在確率を与えるので、物質波は複素数でなければならないとされている。（私個人はあまり納得していないが、歴史的にはそうなっているようである。どのみち、指数表現の複素数は数式を簡単にするので、願ったりかなったりではある。そう考えておいてもあまり支障はないと思われる。）