

CO₂の温室効果計算における基礎理論3章 **(作成・修正中)**

Shuichi Yahiro

2016年3月29日

1 物質の放射と吸収の基礎理論

2 気体の吸収と放射

3 地球大気の温室効果ガスの効果

地球大気の温室効果を議論する前に、どのような計算モデルを考えればよいのかは重要な問題である。大気を多層モデルで考えるのはありふれた考えであるが、最も現実的かもしれない。メッシュモデルでは、分割サイズを小さくすればするほど計算精度は向上するが、地球規模の大きさの大気を取り扱おうとすると分割サイズを小さくすることに限界が生じ、たとえスーパーコンピュータでも精度の高い計算は不可能であろう。また、光の吸収と放射を取り扱う場合、振動数によっては近いところの影響だけでよい場合もあれば遠方の効果を考慮しなければならない場合もあり、多層モデルでもその方程式は簡単ではない。対流圏における対流による熱伝導や分子衝突による熱伝達も考慮する必要があるであろう。まずは、簡単なモデルを通じて多くの計算を行いながら、ゆっくりと最適モデルを模索していくのが最良の方策と思われる。なかなか適切な参考資料が見つからないので、かなり苦労している。

3.1 球体モデルによる計算

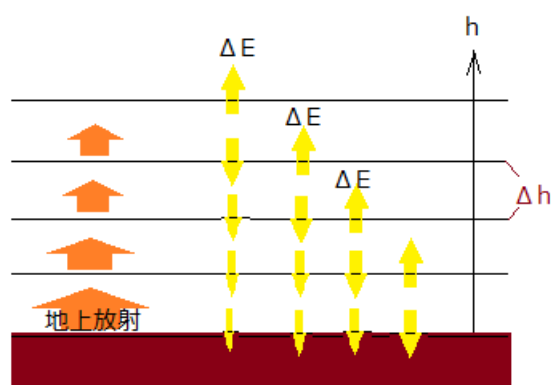


図 3.1: 平行平面モデル

本来ならば地球は球に近いので、球体モデルで考えるのが正しい考え方であろう。しかし、現実問題として、計算可能かどうかが問題となる。平行平面モデル(図 3.1)は近年においてもよい近似として使われている。

平行平面モデルは上下方向の光の流れを追う簡単なモデルであり、様々な近似の仮定のもとに計算するのであるが、かなり簡単な計算で済ませることができるメリットがある。特に、放射光の角度依存性はほとんどないという前提は計算をもの見事に簡略化してしまう。しかしながら、実際の放射光は非等方性であるのは明らかであるから、そのことを考慮に入れようとする、図 3.2 の球体モデルで考えることになるが、恐ろしく面倒な計算処理をしなければなら

なくなる。path 1、path 2 は、点 P を通過する光の経路を考えたものであるが、path 1 の地上到達点から P 点方向に地上からの放射光が流れ、P 点を通って宇宙空間へと逃げていくようになっている。path 2 は、P 点を通っているが、両方向とも宇宙空間へ逃げていく光の経路となっている。それぞれの経路ともに逆の光の流れがあり、P 点はそれぞれの経路の両方向からやってくる放射光が存在し、P 点での吸収に寄与している。もちろん P 点での発光はすべての方向の経路に寄与している。地球そのものは太陽光の向きや地球の自転、そして、完全球体ではない楕円体であることや極地の存在などの非対称性があるの

3 地球大気の温室効果ガスの効果

で、方向に対しても非対称である。刻一刻と時間変化する様子を見ようと思うならば、放射光の流れは不均一な地球の環境の中で角度依存性があると考えるのは当然である。path 2 の P 点を通じた放射光は Q 点へと向かうが、その経路は直線ではなく曲線となっている。それは高高度ほど空気の密度が低いために屈折率が下がり、そのために屈折が起きるため、光線は地球方向に湾曲するためである。P から Q への経路を s とすると、シュワルツシルト方程式 (??or??) を経路 s 上で解くことになる。この方程式は一般的には解析的には解けないので、数値解法で求めることになるが、やや大変である。しかも、すべての方向 θ, ϕ に対して行い、点 P への寄与を積算しなければならない。また、吸収や発光スペクトルは圧力と温度、さらに、温室効果ガスの濃度にも依存して変化するので、すべてを考慮することは非常に大変である。さらに、 z 軸上の P 点以外の点の計算も十分な精度が出るように計算する必要がある。おそらく一つの z 軸上で数百点から数千点、もしくはそれ以上の計算値が必要であろう。さらに、緯度や経度を変えて全地球上の各点において計算しなければならないので、その地球上の位置は数百万点以上になるので、シュワルツシルト方程式を解く個数は数百万 $\times$ 数千 $\times$ 数万 = 数十兆となる。その計算を数ミリ秒の時間変化を求めるために行うのであるから、平衡状態に達するまで繰り返すと、途方もない計算を永遠と計算し続けることになるであろう。

最初は、簡単な理想化した条件下で問題を解き、いくつかの法則性を見出しながら、徐々に現実の問題に近い条件に近づく方策を考える以外にない。path 2 のように上層大気から出る放射には両方向ともに宇宙へ逃げるものが相当あることは明らかであるが、平行平面モデルでは、そのことが考慮されていない。そのため、本来は地表に届かない放射光が地表に届くことになるため、温室効果ガスの影響がより大きく出る可能性が高いと思われる。それゆえ、計算を高速化するための巧妙なアルゴリズムを考え、球体モデルによる放射計算理論を考える必要がある。

平行平面大気モデルを補正するために、地平線付近にある太陽光の散乱問題を球体モデルにより計算している論文¹ や関係する他の論文があるの

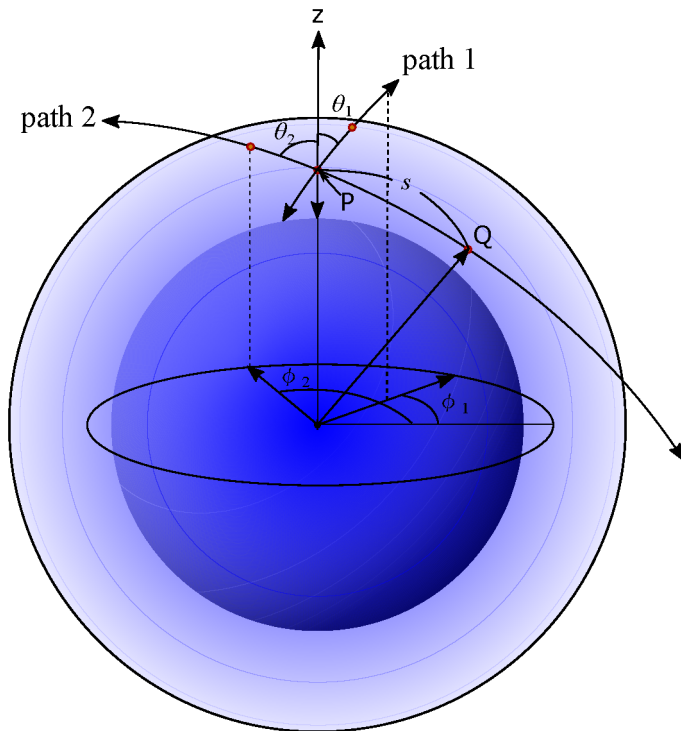


図 3.2: 球体モデル

¹B. M. Herman et. al., "Numerical technique for solving the radiative transfer equation for a spherical shell atmosphere", Appl. Opt. 33, 1760-1770 (1994)

で、現在調査中である。

3.2 地表と大気の熱放射：CO₂ の効果

温室効果ガスは沢山あるが、まずは CO₂ のみを題材とし、考えることにする。また、最初からいきなり精度の高い計算をするのではなく、大胆な近似のもとで大ざっぱに見積もることにする。

前節で球体モデルを紹介したが、このままでは膨大な計算をすることになるので、以下のような様々な仮定を導入することにする。

1. 昼と夜の区別はなく、地表温度は一定とする。(地球の自転は無視する。) また、地表は完全黒体とする。
2. 大気と地球は完全球体とし、温度分布は鉛直方向のみに依存し、水平方向の異方性はないとする。
3. 吸収スペクトルの温度、圧力変化はないとする。
4. 太陽光の影響は地球が受ける年平均エネルギー値で考え、そのすべての太陽エネルギーは地表で吸収され、熱放射(赤外線)エネルギーを大気を通して宇宙空間へ放出すると考える。宇宙空間へ逃げていく熱放射エネルギーの総和と地球が受ける年平均太陽エネルギー値が一致するように、地表温度を調整する。(熱収支の一致)
5. 屈折や散乱の効果は無視し、熱ふく射と吸収のみを考える。

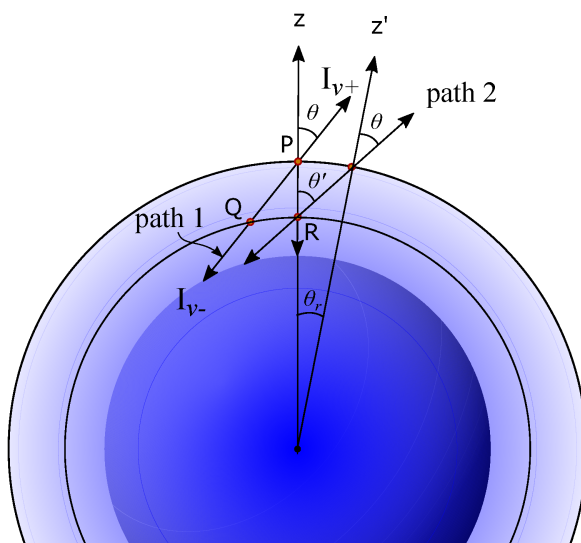


図 3.3: 完全球対称モデル: path1 は P 点を通り、 z 軸と角度 θ をなす。path2 は path1 を θ_r 回転したもの。

上記の仮定は非常に粗い近似であるが、完全球体の対称性が使えるので、計算は途方もなく簡略化される。その一つとして、球対称性からすべての光の path(経路)は、大気上端の任意の一点を通る光の path の角度成分のどれかと一致するので、大気上端の特定の一点を通る path の角度成分を計算するだけになる。最初のモデルとして上記の仮定による計算を行い、少しずつ現実の地球に近づけていくことにしよう。

図 3.3 は、1 から 5 の仮定における完全球対称のモデルを図示したものである。計算しなければならないのは path1 の $\theta = 0 \sim \pi/2$ の範囲のみであり、 ϕ 方向は z 軸周りの回転対称性から考慮しなくてよいことになる。path2 は path1 を θ_r 回転したものであるが、回転

3 地球大気の温室効果ガスの効果

対称性から path1 と同じものになるので、Q 点での計算値で R 点での計算値に置き換えることができる。ただし、z 軸との角度は θ' となる。明らかに、

$$\theta' = \theta + \theta_r \quad (3.1)$$

である。path1 において、右上方向に進む放射光強度を $I_{\nu+}$ 、左下方向へ進む放射光強度を $I_{\nu-}$ とする。それぞれの放射光強度はシュワルツシルト方程式を解き、z 軸上の各点にマッピングすることになる。なお、P 点を出発して地上に到着しないで反対方向に抜けていく path の場合は、その対称性から $I_{\nu+}$ もしくは $I_{\nu-}$ のどちらか一つを計算すればよい。

x-z 平面上で考え、 $P(0, z_{top})$ 点を出発して角度 θ の path1 に沿って光の流れ $I_{\nu-}$ を追うと、 s 進んで $Q(x, z)$ 点に到達したとすると、

$$\begin{aligned} x &= -s \sin \theta \\ z &= z_{top} - s \cos \theta \end{aligned}$$

よって、Q 点を地球を中心とする極座標 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_r \end{pmatrix}$ で表現すると、

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta_r = z_{top} - s \cos \theta \\ -x &= r \sin \theta_r = s \sin \theta \\ \therefore x^2 + z^2 &= r^2 = s^2 \sin^2 \theta + z_{top}^2 - 2z_{top}s \cos \theta + s^2 \cos^2 \theta \\ \therefore r &= \sqrt{s^2 + z_{top}^2 - 2z_{top}s \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\therefore \theta_r = \arccos\left(\frac{z_{top} - s \cos \theta}{r}\right) \quad (3.3)$$

が得られる。上式より、Q 点の高度 $r - r_0$ (r_0 は地球の半径) と R 点への回転角 θ_r と R 点での放射角 θ' が求まる。地上まで到達したら、今度は逆に辿って $I_{\nu+}$ を計算することになる。

さて、シュワルツシルト方程式 $\frac{dI_{\nu}}{\mu_{\nu} ds} = -I_{\nu}(s) + B_{\nu}(T(s))$ より、 $T = T(r)$ および $c = c(r)$ と r の関数とし、 $r = r(s)$ と記述できることから $T = T(r(s))$ 、 $c = c(r(s))$ と書けるので、

$$I_{\nu}(\theta, s + \Delta s) = I_{\nu}(\theta, s) + [B_{\nu}(T(r(s))) - I_{\nu}(\theta, s)] \sigma_{\nu} c(r(s)) \Delta s \quad (3.4)$$

と漸化式表現をすることができる。濃度 c は気圧の減少と一緒に減少するので、不変量は σ_{ν} のみである。 Δs をできるだけ小さく取り、繰り返し計算を行えばよい。

$I_{\nu-}$ の場合の初期値は、 $I_{\nu-}(0) = 0$ であり、 $I_{\nu+}$ の初期値は $I_{\nu+}(0) = B_{\nu}(T_{surface})$ として計算すればよい。

しかしながら、すべての $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ と $0 < \nu < 2500 \text{cm}^{-1}$ の組み合わせについて計算を繰り返さなければならないので、この計算を簡略化する方法論を

最終的に、得られた P 点での $I_{\nu+}$ を地球大気最上端の全球面 S 上で積分すると宇宙空間への全放出エネルギーが得られる。

3 地球大気の温室効果ガスの効果

$$\begin{aligned}
 E_{outerspace-radiation} &= \int_S \iint I_{\nu+}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi dS \\
 &= 8\pi^2 z_{top}^2 \int_0^{\pi/2} I_{\nu+}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで、ランバートのコサインの法則を使った。

3.2.1 CO₂ の吸収断面積

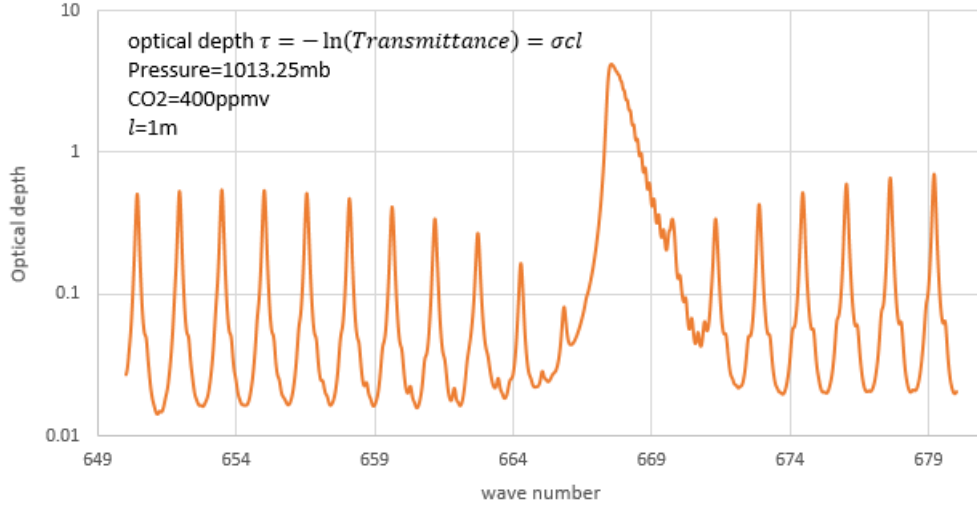


図 3.4: CO₂ 濃度 400ppmv、T=296K の最大吸収領域付近の大気 1m の光学的深さ τ

図 3.4 は、400ppmv の CO₂ の 650~680cm⁻¹ の最大吸収領域付近の吸収スペクトルを光学的深さの尺度で対数表示したものである。この図から、非常に激しい吸収の変化がわかる。668cm⁻¹ 付近の吸収バンドは Q ブランチ、その左右に広がる激しく振動する吸収帯はそれぞれ P および R ブランチと呼ばれる。このデータは SpectralCalc.com の Gas-Cell Simulator を利用して作成した。line-list は HITRAN2012 であり、解像度は 0.01cm⁻¹ である。データは 0.01 刻みの点データであるが、この図はスプライン補完により平滑化表示されている。しかし、このデータを計算で利用する場合は、直線補間で行うことにする。吸収断面積 σ は実際には温度と圧力そして濃度により微妙に変化するが、振動数 ν にのみ依存していると仮定する。つまり $\sigma = \sigma_\nu$ である。光学的深さ τ_ν から、

$$\sigma_\nu = \frac{\tau_\nu}{cl} \tag{3.6}$$

で吸収断面積が決定される。このデータは、標準大気圧 1013.25mb、温度 296K、CO₂ 体積比率 400ppmv のものを使用して決定することにする。計算しやすくするためのバンドの平均化は行わない。忠実に上記スペクトルに沿って計算処理を行うこととする。

実際には、吸収断面積 σ は濃度や気圧により変化するので、その補正は次のステップ以降で行う。

3 地球大気の温室効果ガスの効果

3.2.2 CO₂ モル濃度の高度変化

CO₂ のモル濃度 c は高度 z により変化し、

$$c(z) = c_{Atmosphere}(z) \times 0.0004 \quad (3.7)$$

と大気のもル濃度 $c_{Atmosphere}(z)$ に対する混合比 (400ppmv) から求められる。CO₂ 濃度の高度変化はほとんどないことが知られているので、(実際には大気上端部でいくらか減少するが、) 近似として、CO₂ 混合比は一定と見做すことにする。大気密度 $\rho(z)$ 、平均分子量 $Mo_{Atmosphere}$ を導入すると、($Mo_{Atmosphere} = \{28.014 \times 78.084\%(\text{N}_2) + 32.00 \times 20.946\%(\text{O}_2) + 39.948 \times 0.934\%(\text{Ar})\}/0.99964 = 28.96$)

$$c_{Atmosphere}(z) = \rho(z)/Mo_{Atmosphere} \quad (3.8)$$

である。 $PV = nRT$ の理想気体の方程式を導入すると、

$$P(z) = \frac{n}{V}RT = c_{Atmosphere}(z)RT(z) \quad (3.9)$$

よって、

$$c_{Atmosphere}(z) = (\rho(z)/Mo_{Atmosphere}) = P(z)/RT(z) \quad (3.10)$$

が得られ、圧力と温度の関数になる。さて、圧力 $P(z)$ は、上層大気の重量であるので、

$$dP(z) = -\frac{GM_{earth}}{(r_0 + z)^2}\rho(z)dz \quad (3.11)$$

が成立する。ここで z は地表からの高度であり、 $r_0 = 6,371.0\text{km}$ は地球の平均半径、 $G = 6.674 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$ は重力定数、 $M_{earth} = 5.97237 \times 10^{24}\text{kg}$ は地球の質量である。よって、

$$\frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{GM_{earth}}{(r_0 + z)^2} \frac{Mo_{Atmosphere}}{RT(z)} dz \quad (3.12)$$

両辺を積分すると、

$$\ln P = k - \frac{GM_{earth}Mo_{Atmosphere}}{R} \int \frac{1}{(r_0 + z)^2 T(z)} dz \quad (3.13)$$

よって、

$$P(z) = P(0) \exp \left[-\frac{GM_{earth}Mo_{Atmosphere}}{R} \int_0^z \frac{1}{(r_0 + z')^2 T(z')} dz' \right] \quad (3.14)$$

と記述できる。温度の高度依存性はシミュレーション計算の途中で変化するので、最後の積分は数値的に求めることになる。 $P(0)$ は基本的に定数であり、地球大気の総重量から決まるものであるが、ICAO 標準大気圧 $1013.25\text{hPa}=1013.25\text{mb}$ を使用することにする。実際には地球の自転による遠心力の効果があるので補正する必要があるが、この補正を入れると完全球対称性が壊れるので、次のステップ以降の課題とする。