

P76 ロピタルの定理の発動条件はきちんと書いて下さい。ここでは省略しますが、...

例えば、 $x \rightarrow 0$ のとき
(分母) $\rightarrow 0$, (分子) $\rightarrow 0$ とか

[解]

問 2 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1-x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\frac{(1-x)^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \dots (\text{答}) //$$

(2) $x^{\frac{1}{n}} = t$ とおくと,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-\sqrt[n]{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n t^{n-1}}{e^t}$$

$$= \dots$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^t}$$

$$= 0 \dots (\text{答}) //$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{2 \cos x \sin x}$

$$= 1 \dots (\text{答}) //$$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos^2 x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{3} \dots (\text{答}) //$$

P77 問3

[証] $\lim_{x \rightarrow +0} f^{(n)}(x) = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) ... (*)

を示せばよい

NO.

DATE

まず, $\lim_{x \rightarrow +0} f^{(0)}(x) = 0$ は自明で,

$x > 0$ において

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{t^2}{e^t} \left(\frac{1}{x} = t \text{ とおく} \right)$$

よてロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow +0} f^{(1)}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^t} = 0$$

次に

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} \quad (x > 0) \quad (P_n(x))$$

は多項式) ... (*)

と表わされることを示す.

$$P_1(x) = 1 \dots \textcircled{1} \text{ とするは } n=1 \text{ のとき}$$

(*) は成立する

ある n で (*) が成立すると仮定すると

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)x^{2n} - 2nx^{2n-1}P_n(x)}{x^{4n}} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x) \dots \textcircled{2}$$

とおけば (*) は $n+1$ でも成立する

ので数学的帰納法より (*) は示される

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \lim_{x \rightarrow +0} P_n(x) = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

が示される. また, $\frac{1}{x} = t$ とおけば,

ロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{2n}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2nt^{2n-1}}{e^t} = \dots$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{e^t} = 0 \text{ となるので}$$

以上より (*) が成り立ち,

$x \leq 0$ において

$$f(x) = 0 \text{ とおす}$$

$$f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ で, } f^{(n)}(0) = 0$$

($n=1, 2, 3, \dots$) である ... (証明終り)