

微分積分学 II

2011 年度後期 期末試験問題

【問題 1】 次の積分を求めよ。[30 点]

$$(1) \iint_{0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2} e^{xy} dx dy$$

$$(2) \iint_{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0} y dx dy$$

$$(3) \iint_{-x \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq \pi} \sin(x+y) dx dy$$

【問題 2】 次の積分の順序を変換せよ。 $\int dx \int f(x, y) dy$ の形のものは $\int dy \int f(x, y) dx$ の形に、あるいはその逆の形にせよ。[20 点]

$$(1) \int_0^1 dx \int_{-2x}^{3x} f(x, y) dy$$

$$(2) \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

【問題 3】 次の積分を求めよ。[30 点]

$$(1) \iint_{|x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$(2) \iint_D \frac{x^2}{xy+1} dx dy, D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{4} \leq y \leq x, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{4}{x} \right\}$$

ヒント : $x = st, y = s/t$

$$(3) \iint_D dx dy, D = \left\{ (x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2 \right\}$$

【問題 4】 a, b, c はすべて正の数とする。 xyz -空間で、 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (楕円の放物面という) と、円柱 $x^2 + y^2 = c^2$ および平面 $z = 0$ によって囲まれた領域の体積を求めよ。[20 点]

【問題 5】 次の積分を求めよ。[20 点]

$$(1) \int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{-x^2} dx$$

【解答】

$$\begin{aligned}
 \text{【問題 1】 (1)} \quad \iint_{0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2} e^{xy} dx dy &= \int_1^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} e^{xy} dy \\
 &= \int_1^2 dx \left[\frac{1}{x} e^{xy} \right]_{y=0}^{\frac{1}{x}} \\
 &= \int_1^2 (e-1) \frac{1}{x} dx \\
 &= \left[(e-1) \log x \right]_1^2 \\
 &= (e-1) \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2)} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0} y dx dy &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \\
 &= 2 \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \int_0^1 (1-x^2) dx \\
 &= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(3)} \quad \iint_{-x \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq \pi} \sin(x+y) dx dy &= \int_0^\pi dx \int_{-x}^0 \sin(x+y) dy \\
 &= \int_0^\pi dx \left[-\cos(x+y) \right]_{y=-x}^0 \\
 &= \int_0^\pi (-\cos x + 1) dx \\
 &= \left[-\sin x + x \right]_0^\pi \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

$$\text{【問題 2】 (1)} \quad \int_0^1 dx \int_{-2x}^{3x} f(x, y) dy = \int_{-2}^0 dy \int_{-\frac{y}{2}}^1 f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx$$

$$\text{(2)} \quad \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

【問題 3】 (1) $x+y=s, x-y=t$ とおくと、

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(s^2 + t^2), ds dt = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| dx dy = 2 dx dy$$

である。また、積分の範囲は

$$|s| \leq 1, |t| \leq 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \iint_{|x+y|\leq 1, |x-y|\leq 1} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{|s|\leq 1, |t|\leq 1} \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \cdot \frac{1}{2} ds dt \\
 &= 4 \int_0^1 ds \int_0^1 \frac{1}{4}(s^2 + t^2) dt \\
 &= \int_0^1 ds \left[s^2 t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^1 \\
 &= \int_0^1 (s^2 + 1) ds \\
 &= \left[\frac{s^3}{3} + s \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

(2) $x = st$, $y = s/t$ とおくと、

$$\frac{x^2}{xy+1} = \frac{s^2 t^2}{s^2 + 1}$$

また、 $dx = t ds + s dt$, $dy = \frac{1}{t} ds - \frac{s}{t^2} dt$ より、

$$dx dy = \begin{vmatrix} t & s \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{vmatrix} ds dt = \frac{2s}{t} ds dt$$

さらに、積分の範囲は、

$$D' = \{(s, t) \mid 1 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 2\}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{x^2}{xy+1} dx dy &= \iint_{D'} \frac{s^2 t^2}{s^2 + 1} \cdot \frac{2s}{t} ds dt \\
 &= \int_1^2 ds \int_1^2 \frac{2s^3 t}{s^2 + 1} dt \\
 &= \int_1^2 ds \left[\frac{s^3 t^2}{s^2 + 1} \right]_{t=1}^2 \\
 &= \int_1^2 \frac{3s^3}{s^2 + 1} ds \\
 &= \int_1^2 \left(3s - \frac{3s}{s^2 + 1} \right) ds \\
 &= \left[\frac{3s^2}{2} - \frac{3}{2} \log(s^2 + 1) \right]_1^2 \\
 &= \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \log \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

(3) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと、積分の範囲は

$$D' = \{(s, t) \mid r^2 \leq \cos 2\theta\}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \iint_D dx dy &= \iint_{D'} r dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} + \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} \\
 &= \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta + \int_{3\pi/4}^{\pi} \cos 2\theta d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

【問題 4】 求める体積は

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq c^2 \}$$

ここで、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^c \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) r^2 \cdot r dr \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) d\theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^c \\
 &= \frac{c^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) d\theta \\
 &= \frac{c^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2a^2} + \frac{1 - \cos 2\theta}{2b^2} \right) d\theta \\
 &= \frac{c^4}{4} \left[\frac{\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta}{2a^2} + \frac{\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta}{2b^2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{c^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \pi
 \end{aligned}$$

【問題 5】 (1) $\int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^\pi dy \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx$ (縦線集合を横線集合に変換【問題 2】参照)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi dy \left[\frac{\sin y}{y} x \right]_{x=0}^y \\
 &= \int_0^\pi \sin y dy \\
 &= \left[-\cos y \right]_0^\pi \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 dx \int_0^{x^3} e^{-x^2} dy \quad (\text{横線集合を縦線集合に変換}) \\
&= \int_0^1 dx \left[ye^{-x^2} \right]_{y=0}^{x^3} \\
&= \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2} te^{-t} dt \quad (x^2 = t \text{ と置換}) \\
&= \left[-\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$